

FORMULAIRE DE TRIGONOMETRIE.

• Rappels.

Pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a^2 + b^2 = 1$, il existe $\theta \in \mathbb{R}$, tel que $a = \cos(\theta)$ et $b = \sin(\theta)$
 θ est une mesure de l'angle orienté (\vec{i}, \vec{OM})

Les fonctions cos et sin sont continues et dérivables sur \mathbb{R} et 2π -périodiques, tan est continue et dérivable sur $D = \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$, sin et tan sont impaires, cos est paire et :

$$(\sin)' = \cos, (\cos)' = -\sin, \text{ et } \forall \theta \in D, (\tan)'(\theta) = 1 + \tan^2(\theta) = \frac{1}{\cos^2(\theta)}$$

On a :

- $\forall \theta \in \mathbb{R}, \cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1$
- $\forall \theta \in \mathbb{R}, -1 \leq \cos(\theta) \leq 1$ et $-1 \leq \sin(\theta) \leq 1$
- $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i \sin(\theta)$ et $e^{-i\theta} = \cos(\theta) - i \sin(\theta)$
- $\tan(\theta) = \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)}$ pour $\theta \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ et $\cotan(\theta) = \frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)}$ pour $\theta \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$

• Formule d'Euler : $\cos(\theta) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$ et $\sin(\theta) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$

• Formules de Moivre : Pour $p \in \mathbb{Z}, e^{i p \theta} = (e^{i\theta})^p = (\cos(\theta) + i \sin(\theta))^p = \cos(p\theta) + i \sin(p\theta)$

• Angles associés :

Angles opposés	Angles supplémentaires	Angles complémentaires
$\cos(-\theta) = \cos(\theta)$	$\cos(\pi - \theta) = -\cos(\theta)$	$\cos(\frac{\pi}{2} - \theta) = \sin(\theta)$
$\sin(-\theta) = -\sin(\theta)$	$\sin(\pi - \theta) = \sin(\theta)$	$\sin(\frac{\pi}{2} - \theta) = \cos(\theta)$
$\tan(-\theta) = -\tan(\theta)$	$\tan(\pi - \theta) = -\tan(\theta)$	$\tan(\frac{\pi}{2} - \theta) = \cotan(\theta)$

Angles qui diffèrent de π	Angles qui diffèrent de $\frac{\pi}{2}$
$\cos(\pi + \theta) = -\cos(\theta)$	$\cos(\frac{\pi}{2} + \theta) = -\sin(\theta)$
$\sin(\pi + \theta) = -\sin(\theta)$	$\sin(\frac{\pi}{2} + \theta) = \cos(\theta)$
$\tan(\pi + \theta) = \tan(\theta)$	$\tan(\frac{\pi}{2} + \theta) = -\cotan(\theta)$

x	0	π/6	π/4	π/3	π/2
sin(x)	0	1/2	√2/2	√3/2	1
cos(x)	1	√3/2	√2/2	1/2	0
tan(x)	0	√3/3	1	√3	n.d.

• Formules d'addition :

$$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b \quad \cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$

$$\sin(a + b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a \quad \sin(a - b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a$$

$$\tan(a + b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}, \quad \tan(a - b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}$$

• Formules de duplication :

$$\cos(2a) = \cos^2(a) - \sin^2(a) = 2 \cos^2(a) - 1 = 1 - 2 \sin^2(a) \quad \text{et} \quad \sin(2a) = 2 \sin(a) \cos(a)$$

$$\tan(2a) = \frac{2 \tan(a)}{1 - \tan^2(a)}$$

• Formules de linéarisation :

$$\cos^2(a) = \frac{1 + \cos(2a)}{2} \quad \sin^2(a) = \frac{1 - \cos(2a)}{2}$$

• Résolution d'équations trigonométriques : Pour $a \in \mathbb{R}$,

$$\cos(x) = \cos(a) \iff \begin{cases} \exists k \in \mathbb{Z}, x = a + 2k\pi \\ \text{ou} \\ \exists k \in \mathbb{Z}, x = -a + 2k\pi \end{cases} \quad \sin(x) = \sin(a) \iff \begin{cases} \exists k \in \mathbb{Z}, x = a + 2k\pi \\ \text{ou} \\ \exists k \in \mathbb{Z}, x = \pi - a + 2k\pi \end{cases}$$

$$\text{Pour } a \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}, \quad \tan(x) = \tan(a) \iff \exists k \in \mathbb{Z}, x = a + k\pi$$

• Transformation de produits en sommes et de sommes en produits :

$$\begin{array}{l} \cos(a) \cos(b) = \frac{1}{2}(\cos(a - b) + \cos(a + b)) \\ \sin(a) \sin(b) = \frac{1}{2}(\cos(a - b) - \cos(a + b)) \\ \sin(a) \cos(b) = \frac{1}{2}(\sin(a - b) + \sin(a + b)) \end{array} \left| \begin{array}{l} \sin(p) + \sin(q) = 2 \sin\left(\frac{p+q}{2}\right) \cos\left(\frac{p-q}{2}\right) \\ \sin(p) - \sin(q) = 2 \cos\left(\frac{p+q}{2}\right) \sin\left(\frac{p-q}{2}\right) \\ \cos(p) + \cos(q) = 2 \cos\left(\frac{p+q}{2}\right) \cos\left(\frac{p-q}{2}\right) \\ \cos(p) - \cos(q) = -2 \sin\left(\frac{p+q}{2}\right) \sin\left(\frac{p-q}{2}\right) \end{array} \right.$$

• Expression de la tangente en fonction de l'arc moitié :

En posant $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$, on obtient quand cela a un sens :

$$\cos(x) = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}, \quad \sin(x) = \frac{2t}{1 + t^2}, \quad \tan(x) = \frac{2t}{1 - t^2}$$