

Programme de révisions - ECG2

1 Ce qui doit être acquis.

1. Tout le cours d'ECG1, chaque définition, chaque propriété.
2. Les exercices de colle, les DS, les DM.

2 Comment faire?

1. Pour la partie cours :

Posez-vous la question : êtes-vous capable de refaire les exemples du cours, avec une rédaction irréprochable ?

Si c'est non, vous savez alors ce qu'il vous reste à faire :

c'est à la fois un travail d'apprentissage et de rédaction que personne ne peut faire à votre place, et aussi un travail de compréhension profonde (n'oubliez pas qu'en cas de problème vous avez mon adresse mail en haut de ce document pour me contacter).

2. Pour la partie pratique (les exercices) :

De nombreux calculs, exercices ou thèmes sont fondamentaux et récurrents en concours. Ils ne constituent absolument pas une garantie de réussir les épreuves, mais il s'agit quand même d'un second socle (après celui du cours) constitué des bases minimales pour affiner sa compréhension et s'exercer à la rédaction.

Par exemple, on ne peut concevoir que l'étudiant passe plusieurs minutes à se demander comment il va rédiger la réponse à une question, alors qu'il a déjà rencontré plusieurs fois cette même question auparavant. Ce genre de problème doit être réglé définitivement.

Encore une fois, une rédaction irréprochable est absolument nécessaire, au risque de froisser le correcteur et de ne pas avoir les points attendus.

Une fois ces bases acquises (mais il faudra y revenir régulièrement), on pourra avancer et aller plus loin. **En effet, il ne sert à rien de vouloir toujours faire du neuf si on ne sait plus refaire le vieux. L'étudiant qui ne comprend pas cela est condamné à redécouvrir sans arrêt ce qu'il a mal appris ou oublié.**

3 Concrètement

Pour bien faire, je mets ci-dessous quelques-uns de ces exercices et problèmes fondamentaux en ECG1. D'autres problèmes sont extraits de concours. Ce n'est évidemment pas une liste exhaustive!

L'idéal, pour bien démarrer l'année, serait de maîtriser tous ces exercices, mais il y en a beaucoup trop... Vous devez donc faire au mieux, selon vos capacités, en visant d'abord et avant tout la qualité plutôt que la quantité : il vaut mieux en maîtriser la moitié parfaitement plutôt que tout superficiellement.

La plupart de ces exercices sont à savoir faire absolument pour bien démarrer votre seconde année!

Ces exercices pourront servir tout au long de l'année pour réviser le programme d'ECG1!

3.1 Analyse

Exercice 1.

Soient $n \in \mathbb{N}$ et f_n l'application définie sur \mathbb{R}^+ par : $f_n(x) = e^{2x} - 2(n+1)e^x - n$

1. Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ possède une unique solution dans \mathbb{R}^+ . On notera x_n cette solution.
2. Calculer x_0 .
3. Montrer que $f_n(x_{n+1}) > 0$ et en déduire la monotonie de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.
4. $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est-elle convergente?

Exercice 2.

Pour tout $\alpha > 0$, on définit le polynôme P_α sur \mathbb{R} par :

$$P_\alpha(x) = x^3 + \alpha x - 1$$

1. Démontrer que P_α admet une unique racine réelle que l'on notera x_α .
2. Démontrer que, pour tout $\alpha > 0$, $x_\alpha > 0$.
3. Démontrer que, pour tout $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, $P_\alpha(x_\beta) = (\alpha - \beta)x_\beta$
4. En déduire que la fonction $\alpha \mapsto x_\alpha$ est décroissante.

Exercice 3.

1. Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x \geq x + 1$.
2. En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall t \in [0; \sqrt{n}], e^{-t^2} \geq \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n$$

Exercice 4.

Soient $\lambda \in]0, 1[$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

On considère l'équation : $\lambda e^x = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}$ (E)

1. Montrer que (E) possède une unique solution x_n sur \mathbb{R}^+ .
2. Démontrer que la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ ainsi définie est strictement croissante.

Exercice 5.

Soient f une fonction définie sur un intervalle I de \mathbb{R} et $k > 0$. On dit que f est k -lipschitzienne lorsque :

$$\forall (x, y) \in I^2, |f(x) - f(y)| \leq k|x - y|$$

1. Démontrer que toute fonction k -lipschitzienne sur I est continue sur I .
2. On suppose à partir de maintenant que $k \in]0, 1[$, que $I = [a, b]$ est stable par f et que f possède un point fixe $\alpha \in I$. On définit alors la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par $x_0 \in I$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} = f(x_n)$.
 - (a) Montrer qu'il ne peut exister qu'un seul point fixe pour f .
 - (b) Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|x_n - \alpha| \leq k^n |x_0 - \alpha|$.
 - (c) En déduire que la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers α .

Exercice 6. (irrationalité de e)

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$ et $v_n = u_n + \frac{1}{n.n!}$.

1. Démontrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ sont adjacentes.
2. On appelle α la limite commune de ces deux suites. Montrer que $2 < \alpha < 3$ puis, en raisonnant par l'absurde, démontrer que α est irrationnel (On pourra supposer $\alpha = \frac{a}{b}$ avec $(a, b) \in (\mathbb{N}^*)^2$, prendre $n = b$ et utiliser la stricte monotonie de (u_n) et (v_n)).
3. Appliquer l'inégalité des accroissements finis sur $[0, 1]$ avec $f : x \mapsto e^{-x} \left(\sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} \right)$ et démontrer que $\alpha = e$.

Exercice 7.

On pose, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$.

1. Soit $c > 0$. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $\frac{\varphi(x)}{x} = \frac{c}{n}$ admet sur \mathbb{R}_+^* une unique solution que l'on notera x_n .
2. Montrer que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = +\infty$.
3. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$x_n^2 + 2 \ln(x_n) = 2 \ln(n) - \ln(2\pi c^2)$$

4. En prenant un équivalent de chaque membre de l'égalité obtenue à la question précédente, établir que :

$$x_n \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{2 \ln(n)}$$

Exercice 8.

1. Soit $k \in \mathbb{N}$. Déterminer un équivalent quand $n \rightarrow +\infty$ de $\binom{n}{k}$.
2. En déduire, pour tout $a \in]0, 1[$, les limites suivantes :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\binom{n}{k}}{n^k} \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \binom{n}{k} a^n$$

Exercice 9.

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$.

1. En considérant la monotonie de $t \mapsto \frac{1}{t}$, établir que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$\frac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{dt}{t} \leq \frac{1}{k}$$

2. En déduire que, pour tout entier $n \geq 2$, on a : $S_n - 1 \leq \ln(n) \leq S_n - \frac{1}{n}$
3. En déduire un équivalent quand $n \rightarrow +\infty$ de la somme S_n .

Exercice 10.

On pose $f(x) = \ln(\ln x)$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f et montrer que f' est décroissante sur $[2, +\infty[$.
2. En utilisant l'inégalité des accroissements finis, démontrer que, pour tout entier $k \geq 2$, on a : $f(k+1) - f(k) \leq \frac{1}{k \ln k}$.
3. En déduire la nature de la série de terme général $\frac{1}{k \ln k}$.

Exercice 11.

1. Rappeler pourquoi la fonction $x \mapsto e^x$ est convexe.
Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe sur un intervalle I . On admet l'inégalité de Jensen (qui peut se démontrer par récurrence sur $n \geq 2$) :

Pour tout $(y_1, \dots, y_n) \in I^n$ et tous $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in [0, 1]$ tels que $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$, on a :

$$f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i y_i\right) \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i f(y_i)$$

(l'inégalité est en sens contraire lorsque f est concave)

2. En déduire l'inégalité arithmético-géométrique valable pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in (\mathbb{R}^+)^n$:

$$(x_1 \cdots x_n)^{1/n} \leq \frac{1}{n}(x_1 + \cdots + x_n)$$

(On pourra appliquer l'inégalité de Jensen avec $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = \frac{1}{n}$)

3. En déduire l'inégalité « géométrico-harmonique », valable pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n$:

$$\frac{n}{1/x_1 + \cdots + 1/x_n} \leq (x_1 \cdots x_n)^{1/n}$$

Exercice 12.

1. Démontrer que la fonction $f : x \mapsto \ln(1 + e^x)$ est convexe sur \mathbb{R} .
2. En déduire que, pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n$,

$$1 + \left(\prod_{k=1}^n x_k\right)^{1/n} \leq \left(\prod_{k=1}^n (1 + x_k)\right)^{1/n}$$

(On pourra appliquer l'inégalité de Jensen - voir exercice précédent)

3. En déduire que, pour tout $(a_1, \dots, a_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n$ et tout $(b_1, \dots, b_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n$,

$$\left(\prod_{k=1}^n a_k\right)^{1/n} + \left(\prod_{k=1}^n b_k\right)^{1/n} \leq \left(\prod_{k=1}^n (a_k + b_k)\right)^{1/n}$$

Exercice 13.

1. Rappeler la formule de Taylor-Lagrange avec reste intégral entre a et b pour une fonction f de classe \mathcal{C}^{n+1} sur \mathbb{R} .
2. Appliquer cette formule entre 0 et 1 à l'ordre 1, avec la fonction f définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par $f(x) = \ln(1 + x^2)$.

3. Calculer : $\int_0^1 \frac{(1+t)(1-t)^2}{(1+t^2)^2} dt$.

3.2 Algèbre (coefficients binomiaux - polynômes)

Exercice 14.

Simplifier les expressions suivantes, pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1} \binom{n}{k} \quad ; \quad \sum_{k=1}^n k \binom{n}{k}$$

Exercice 15.

Simplifier les expressions suivantes, pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\sum_{k=1}^n k^2 \binom{n}{k} \quad ; \quad \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} k \binom{n}{k}$$

Exercice 16.

1. Démontrer la formule de Pascal généralisée :

$$\text{Pour } p \leq n \text{ entiers naturels : } \sum_{k=0}^n \binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}$$

2. En déduire la somme des n premiers nombres entiers.
3. Déterminer a et b tels que $k^2 = a \binom{k}{2} + b \binom{k}{1}$
4. En déduire la somme des carrés des n premiers nombres entiers : $\sum_{k=1}^n k^2$.

Exercice 17.

Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} \binom{n}{k} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$$

Exercice 18. (Polynômes de Tchebychev)

On considère la suite de polynômes $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $T_0(X) = 1$, $T_1(X) = X$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad T_{n+2}(X) = 2XT_{n+1}(X) - T_n(X)$$

1. Déterminer T_2 , T_3 et T_4 .
2. Déterminer par récurrence le degré et le coefficient dominant de T_n .
3. Déterminer la parité de T_n en fonction de n .
4. Calculer $T_n(1)$ et $T_n(-1)$.
5. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que la famille (T_0, \dots, T_n) est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

3.3 Algèbre (matrices - espaces vectoriels - dimension)

Exercice 19. (Matrices bistochastiques)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice bistochastique (i.e. une matrice dont tous les coefficients sont positifs et sur chaque ligne et chaque colonne, la somme des coefficients vaut 1)

Pour $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R}^+)$, on pose alors $Y = AX = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$. On veut montrer que : $\prod_{i=1}^n y_i \geq \prod_{i=1}^n x_i$

1. Montrer que cette inégalité est évidente si l'un des x_i est nul. Exprimer, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, y_i en fonction des $(a_{i,j})$ et des x_j .

On suppose maintenant que tous les x_i sont strictement positifs.

2. Rappeler pourquoi la fonction $x \mapsto \ln x$ est concave sur \mathbb{R}_+^* et en déduire que :

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad \ln(y_i) \geq \sum_{j=1}^n a_{i,j} \ln x_j \quad (\text{on pourra appliquer l'inégalité de Jensen - voir ex. 11})$$

3. Additionner ces inégalités et conclure.

Exercice 20.

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $S \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique telle que $S^2 = S$. Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, on pose $M(\alpha) = \alpha I_n + (1 - \alpha)S$.

1. Montrer que pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, $M(\alpha)$ est symétrique.

2. Montrer que pour tout $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, $M(\alpha)M(\beta) = M(\alpha\beta)$.

3. En déduire que, pour tout $\alpha \neq 0$, $M(\alpha) \in GL_n(\mathbb{R})$ et déterminer $(M(\alpha))^{-1}$.

4. On suppose que $\alpha > 0$ et qu'il existe un vecteur colonne non nul X et $\lambda \in \mathbb{R}$ tels que $M(\alpha)X = \lambda X$. Démontrer alors que $\lambda > 0$.

(Pour cette dernière question, on pourra calculer ${}^t(M(\sqrt{\alpha})X)(M(\sqrt{\alpha})X)$)

Exercice 21. (Système récurrent).

On considère $T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $N = T - 2I_3$.

1. Calculer N , N^2 et N^3 .

2. En déduire T^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3. On pose $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Montrer que $P \in GL_3(\mathbb{R})$ et calculer P^{-1} .

4. Calculer la matrice $A = PTP^{-1}$.

5. En déduire grâce à 2. une expression de A^n .

6. Donner l'expression en fonction de n des suites (u_n) , (v_n) et (w_n) définies par $u_0 = 1$, $v_0 = 0$, $w_0 = 1$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} u_{n+1} & = & 2u_n + w_n \\ v_{n+1} & = & u_n + v_n \\ w_{n+1} & = & -u_n + v_n + 3w_n \end{cases}$$

Exercice 22. (Trace d'une matrice carrée)

Pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on notera $[A]_{i,j}$ le coefficient de la $i^{\text{ème}}$ ligne et $j^{\text{ème}}$ colonne de A . On appelle trace de A et on note $\text{Tr}(A)$, la somme des coefficients diagonaux de A :

$$\text{Tr}(A) = \sum_{i=1}^n [A]_{i,i}$$

1. Montrer que Tr est une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Montrer que pour tout $(A, B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))^2$, $\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA)$.
3. On dit que deux matrices A et B sont semblables si il existe $P \in GL_n(\mathbb{R})$ telle que $B = PAP^{-1}$. Montrer que deux matrices semblables ont même trace. La réciproque est-elle vraie?
4. Existe-t-il deux matrices A et B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $AB - BA = I_n$?

Exercice 23.

Soient $a \in \mathbb{R}$ et $M(a) = \begin{pmatrix} 1-2a & a & a \\ a & 1-2a & a \\ a & a & 1-2a \end{pmatrix}$.

1. Montrer que, pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $M(a)M(b) = M(a+b-3ab)$.
2. En déduire les valeurs de a telles que $M(a) \in GL_3(\mathbb{R})$ et déterminer alors $(M(a))^{-1}$.
3. Déterminer $a_0 \in \mathbb{R}^*$ tel que $(M(a_0))^2 = M(a_0)$.
4. On pose $P = M(a_0)$ et $Q = I_3 - P$.
 - (a) Soit $a \in \mathbb{R}$, montrer qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $M(a) = P + \alpha Q$.
 - (b) Calculer P^2 , Q^2 , PQ et QP .
 - (c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, exprimer simplement $(M(a))^n$ en fonction de α , P et Q .

Exercice 24.

Dans cet exercice, on admet que l'ensemble E des fonctions numériques deux fois dérivable est un \mathbb{R} -espace vectoriel et on note :

$$F = \{\varphi \in E \mid \forall x \in \mathbb{R}, \varphi''(x) = (1+x^2)\varphi(x)\}$$

1. Montrer que F est un \mathbb{R} -espace vectoriel.
2. Montrer que si $(u, v) \in F^2$ alors $u'v - v'u$ est constante.
3. Montrer que la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = e^{\frac{x^2}{2}}$ appartient à F .
4. Montrer que la fonction définie sur \mathbb{R} par $g(x) = f(x) \int_0^x \frac{1}{(f(t))^2} dt$ appartient à F .

Exercice 25.

Soit E l'espace vectoriel des fonctions réelles deux fois dérivables sur un intervalle I (on admet que c'est un $e.v.$). On considère :

$$G = \{f \in E \mid \forall x \in I, f(x) + 2f'(x) + f''(x) = 0\}$$

1. Démontrer que G est un sous-espace vectoriel de E .
2. Soit la fonction définie sur I par $u(x) = e^{\alpha x}$. Déterminer les valeurs de α pour lesquelles $u \in G$.

3. Soit $f \in G$, on pose, pour tout $x \in I$, $\varphi(x) = e^x f(x)$. Calculer φ' et φ'' .
4. En déduire l'expression de $f(x)$.
5. Donner une base et la dimension de G .

Exercice 26. (Polynômes interpolateurs de Lagrange)

Soient $a_0 < a_1 < \dots < a_n$, $n + 1$ réels deux à deux distincts.

1. Déterminer, pour tout $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$, un polynôme $L_i \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que :

$$\forall j \in \llbracket 0, n \rrbracket, \quad L_i(a_j) = \begin{cases} 1 & , \text{ si } i = j \\ 0 & , \text{ si } i \neq j \end{cases}$$

2. Prouver que : $\forall P \in \mathbb{R}_n[X], P = \sum_{k=0}^n P(a_k)L_k$.

Que peut-on en déduire sur la famille (L_0, L_1, \dots, L_n) ?

3. Montrer que (L_0, L_1, \dots, L_n) est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

4. Établir les égalités suivantes pour tout $p \in \llbracket 0, n \rrbracket$: $\sum_{k=0}^n a_k^p L_k = X^p$

5. On souhaite calculer, pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, l'intégrale : $\int_0^1 P(t)dt$ Montrer qu'il existe un unique $(n + 1)$ -uplets $(\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n)$ tel que

$$\int_0^1 P(t)dt = \sum_{i=0}^n \lambda_i P(a_i)$$

Exercice 27.

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que pour tout entier $n \geq 3$, $A^n = 0$.
2. On pose, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $E(t) = I_3 + tA + \frac{t^2}{2}A^2$. Démontrer que, pour tout $(t, t') \in \mathbb{R}^2$, $E(t)E(t') = E(t + t')$.
3. En déduire que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $E(t) \in GL_3(\mathbb{R})$ et donner son inverse.
4. Démontrer que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $(E(t))^n = E(nt)$.

Exercice 28.

On pose dans \mathbb{R}^4 :

$u_1 = (1, 0, 1, -1)$, $u_2 = (0, 1, 1, -2)$, $u_3 = (2, -3, -1, 4)$ et $F = \text{Vect}(u_1, u_2, u_3)$.

1. Déterminer une base et la dimension de F .
2. On pose $v_1 = (1, 1, 1, 1)$, $v_2 = (0, 2, 0, 3)$ et $G = \text{Vect}(v_1, v_2)$.
Démontrer que $\mathbb{R}^4 = F \oplus G$.
3. On pose $H = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y + z + t = 0\}$.
Démontrer que H est un s.e.v. de \mathbb{R}^4 , donner une base et sa dimension.
4. Déterminer $\dim(F + H)$.

3.4 Algèbre linéaire

Exercice 29.

Soit u l'application définie sur $\mathbb{R}_4[X]$ qui à tout polynôme $P \in \mathbb{R}_4[X]$ associe le reste de la division euclidienne de P par $X^2 + X + 1$.

1. Calculer $u(X^4)$.
2. Montrer que u est linéaire.
3. Montrer que u est un projecteur de $\mathbb{R}_4[X]$.
4. Déterminer $\text{Ker}(u)$ et en donner une base.
5. Montrer que $\text{Im}(u) = \mathbb{R}_1[X]$.

Exercice 30.

Soient E un \mathbb{R} - $e.v.$ de dimension 3 et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E . On dispose d'un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ défini par :

$$u(e_1) = e_1 + 5e_2 + 2e_3; \quad u(e_2) = -e_1 + e_2; \quad u(e_3) = e_1 - 7e_2 - 2e_3$$

1. Déterminer la matrice de u dans la base \mathcal{B} .
2. Déterminer u^3 et en déduire que :

$$\text{Im}(u) \subset \text{Ker}(u^2) \quad \text{et} \quad \text{Im}(u^2) \subset \text{Ker}(u)$$

3. Démontrer que : $\text{rg}(u) \leq \dim(\text{Ker}(u^2)) \leq 2$.
4. Déterminer le rang de u et en déduire que :

$$\text{Im}(u) = \text{Ker}(u^2) \quad \text{et} \quad \text{Ker}(u) = \text{Im}(u^2)$$

Exercice 31.

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que : $P(X) + P(X+1) = 0$.

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(2n) = P(0)$.
2. On considère $\Phi : \mathbb{R}[X] \rightarrow \mathbb{R}[X]$
$$P \mapsto P(X) + P(X+1)$$
 - (a) Montrer que Φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.
 - (b) Déterminer $\text{Ker}(\Phi)$.
 - (c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer qu'il existe toujours $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$ tel que :
 $\Phi(P) = X^n$. (On ne demande pas d'explicitier P)
 - (d) Que peut-on en déduire pour Φ ?

Exercice 32.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, on pose :

$$B_k = X^k(1-X)^{n-k}$$

1. À l'aide de la formule du binôme de Newton, démontrer que, pour tout $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $X^i \in \text{Vect}(B_0, \dots, B_n)$.
2. Démontrer que (B_0, \dots, B_n) est une famille génératrice de $\mathbb{R}_n[X]$.

3. En déduire que (B_0, \dots, B_n) est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

4. On considère $\Phi: \mathbb{R}_n[X] \rightarrow \mathbb{R}_n[X]$

$$P \mapsto \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} P\left(\frac{k}{n}\right) B_k$$

Démontrer que Φ est un endomorphisme injectif de $\mathbb{R}_n[X]$. Φ est-il un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$?

Exercice 33.

On définit l'application Δ sur $\mathbb{R}[X]$ par : $(\Delta P)(X) = P(X + 1) - P(X)$.

1. Montrer que $\Delta \in \mathcal{L}(E)$.
2. Déterminer le noyau de Δ .
3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
 - (a) Montrer que : $\deg(\Delta X^n) = n - 1$.
 - (b) En déduire que la famille $((\Delta X^k)_{1 \leq k \leq n+1})$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
 - (c) Démontrer alors que Δ est surjective.
4. Montrer qu'il existe une unique famille $(H_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de $\mathbb{R}[X]$ telle que $H_0 = 1$, $\Delta(H_n) = H_{n-1}$, et pour tout $n \geq 1$, $H_n(0) = 0$.

Exercice 34.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $\text{tr}: \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$

$$M \mapsto \text{tr}(M)$$

1. Démontrer que tr est linéaire non nulle.
2. Déterminer $\dim(\text{Ker}(\text{tr}))$.
3. Démontrer que $\text{Ker}(\text{tr})$ et $\text{Vect}(I_n)$ sont supplémentaires dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 35.

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et x_0, \dots, x_n , $n + 1$ points deux à deux distincts de \mathbb{R} .

1. Montrer que l'application

$$f: \mathbb{R}_n[X] \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$$

$$P \mapsto (P(x_0), \dots, P(x_n))$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

2. En déduire que, pour tout $(b_0, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$, il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que : $\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket, P(x_i) = b_i$.

3. On pose $V = \begin{pmatrix} 1 & x_0^1 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1^1 & \dots & x_1^n \\ \vdots & \dots & & \vdots \\ 1 & x_n^1 & \dots & x_n^n \end{pmatrix}$. À l'aide de f , montrer que V est inversible.

Exercice 36.

On pose $E = \mathbb{R}_n[X]$ où $n \in \mathbb{N}^*$ et on désigne par f l'application qui à $P \in E$ associe le polynôme $f(P)$ défini par : $f(P)(X) = P(X + 1) + P(X)$

1. Montrer que f est un endomorphisme de E .
2. On note \mathcal{B} la base canonique de E . Déterminer la matrice de f dans la base \mathcal{B} .
3. Montrer que f est bijectif.
4. Soit $P \in E$. On pose alors $Q = f^{-1}(P)$. Exprimer simplement, pour tout entier strictement positif N , la somme : $S(N) = \sum_{k=1}^N (-1)^k P(k)$, en fonction de $(-1)^N$, $Q(N+1)$ et $Q(1)$.

Exercice 37.

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$. On note $E = \mathbb{R}_n[X]$ et $\mathcal{B} = (1, X, \dots, X^n)$ la base canonique de E .

On note, pour tout polynôme P de E : $T(P) = (X(X-1)P)'$.

Par exemple, si $P = X^2$, alors $P' = 2X$, et donc :

$$T(P) = (X(X-1)2X)' = (2X^3 - 2X^2)' = 6X^2 - 4X.$$

1. Montrer que T est un endomorphisme de E .
2. Calculer, pour tout k de $\{0, \dots, n\}$, $T(X^k)$. En déduire la matrice M de T dans la base \mathcal{B} .
3. L'endomorphisme T est-il bijectif? Quel est le rang de T ? Déterminer $\text{Ker}(T)$.

Exercice 38.

Soit φ l'application définie sur $\mathbb{R}_n[X]$ par :

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \quad \varphi(P) = XP' - P$$

1. Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ et déterminer $\text{Im}(\varphi)$ et $\text{rg}(\varphi)$.
2. En déduire $\text{Ker}(\varphi)$.
3. Donner la matrice de φ dans la base canonique.
4. Montrer que $\text{Im}(\varphi) \oplus \text{Ker}(\varphi) = \mathbb{R}_n[X]$.

3.5 Intégrales - Intégrales impropres

Exercice 39.

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx$.

1. Montrer que la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente et déterminer sa limite (on pourra encadrer l'intégrande par des fonctions plus simples à intégrer).
2. Calculer I_0 et I_1 .
3. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n + I_{n+1} = \frac{1}{n+1}$.
4. Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $(-1)^n I_n = \ln 2 + \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{k}$
5. En déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{k} = -\ln 2$.

Exercice 40. (Wallis)

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t dt$.

1. Calculer I_0, I_1 et montrer que $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t dt$.
2. Justifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n > 0$.
3. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n$.
4. Montrer que la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante et convergente.
5. En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\frac{n+1}{n+2} \leq \frac{I_{n+1}}{I_n} \leq 1$, puis montrer que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{I_{n+1}}{I_n} = 1$
6. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_{2n} = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \frac{\pi}{2}$.
7. Montrer que le produit $nI_n I_{n-1}$ est constant et le calculer.
8. En déduire un équivalent de I_n quand $n \rightarrow +\infty$.

Exercice 41. (Somme de Riemann)

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k^2}$. Déterminer la limite suivante :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} nS_n$$

Exercice 42.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $I_n = \int_0^1 (1-t^2)^n dt$.

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $I_n = \frac{2n}{2n+1} I_{n-1}$.
2. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}$.
3. Déterminer $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{(-1)^k}{2k+1}$.

Exercice 43.

On pose $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

$$x \mapsto \int_x^{2x} \frac{\sin(t)}{1+t^2} dt$$

1. Démontrer que F est bornée et démontrer que : $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 0$.
2. Démontrer que F est paire.
3. Démontrer que F est dérivable et déterminer une expression de F' .

Exercice 44.

Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose $I_n = \int_0^{+\infty} e^{-1/t} \frac{1}{t^n} dt$.

1. Étudier en fonction de n la nature de I_n .
2. Effectuer le changement de variable $u = \varphi(t) = \frac{1}{t}$ dans le cas où l'intégrale converge.

3. En déduire la valeur de I_n dans les cas de convergence.
(On rappelle que la fonction Gamma $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$ vérifie $\Gamma(n) = (n-1)!$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$)

Exercice 45.

On considère la suite (I_n) définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad I_n = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^3)^n}$$

1. Montrer que I_n est bien définie.
2. Montrer que $(I_n)_{n \geq 1}$ est convergente.
3. Déterminer une relation de récurrence entre I_{n+1} et I_n .
4. Démontrer que $\ln(I_{n+1}) - \ln(I_n) \sim -\frac{1}{3n}$.
5. En déduire que $(I_n)_{n \geq 1}$ converge vers 0.

Exercice 46.

Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose $I_n = \int_0^1 (t \ln t)^n dt$.

1. Justifier la convergence de l'intégrale I_n .
2. Calculer I_0 puis exprimer I_n en fonction de n et $J_n = \int_0^1 (\ln u)^n du$. (On pourra effectuer le changement de variable $u = t^{n+1}$).
3. Exprimer J_n en fonction de n et J_{n-1} .
4. En déduire la valeur de I_n .

Exercice 47.

1. Soit $x > 0$. Montrer que $\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t^2}}{t} dt$ converge. On définit alors f et g sur \mathbb{R}_+^* par $f(x) = \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t^2}}{t} dt$ et $g(x) = \int_x^1 \frac{1 - e^{-t^2}}{t} dt$.
2. Montrer que g admet une limite finie en 0^+ et que : $\forall x > 0, f(x) = -g(x) - \ln x + f(1)$.
3. En déduire que : $f(x) \underset{0}{\sim} -\ln x$.

Exercice 48. (La fonction Gamma)

Soit Γ la fonction définie par :

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$$

1. Montrer que Γ converge si et seulement si $x > 0$.
2. En intégrant par parties, démontrer que :

$$\forall x > 0, \quad \Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$$

3. Calculer $\Gamma(1)$ et en déduire l'expression de $\Gamma(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
4. En admettant que $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$, calculer $\Gamma(1/2)$. (poser $u = \sqrt{t}$).

Exercice 49.

Soit f la fonction définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{e^x}{(1 + e^x)^2}$.

1. Étudier la parité de f et donner une primitive de f sur \mathbb{R} .
2. Justifier alors la convergence de $\int_0^{+\infty} f(x)dx$ et calculer $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$.
3. Démontrer, à l'aide d'une intégration par parties, que :

$$\int_0^{+\infty} \frac{xe^x}{(1 + e^x)^2} dx = \ln 2$$

4. En déduire la convergence et la valeur de $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{xe^x}{(1 + e^x)^2} dx$

3.6 Séries

Exercice 50.

Déterminer la nature des séries suivantes et calculer leur somme éventuelle.

1. $\sum_{n \geq 2} \left(\frac{2}{e}\right)^n$; $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{2^n(n-1)!}$; $\sum_{n \geq 1} \frac{n}{3^{n-1}}$; $\sum_{n \geq 0} \frac{-3+5n}{n!}$
2. $\sum_{n \geq 0} n^2 q^n$ (avec $|q| < 1$) ; $\sum_{n \geq 0} \frac{n^2}{n!}$ (Remarque : $n^2 = n(n-1) + n$)

Exercice 51. (Constante d'Euler-Mascheroni)

1. Démontrer que, pour tout $t > -1$, $\ln(1+t) \leq t$.
2. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$, $u_n = H_n - \ln(n+1)$ et $v_n = H_n - \ln n$. Démontrer que (u_n) et (v_n) sont adjacentes.
3. On note γ la limite commune de (u_n) et (v_n) . Montrer que $\gamma \in]0; 1[$.
4. Montrer qu'il existe une suite (ε_n) telle que : $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + \varepsilon_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \varepsilon_n = 0$.
5. On pose, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{k}$, $P_n = S_{2n}$ et $I_n = S_{2n+1}$. Démontrer que (P_n) et (I_n) sont adjacentes et en déduire que (S_n) converge.
6. Exprimer $\sum_{k=1}^n \frac{1}{2k}$ en fonction de H_n , puis $\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2k+1}$ en fonction de H_n et H_{2n} .
7. Écrire alors S_{2n} en fonction de H_n et H_{2n} , puis déterminer la limite de (S_n) .

Exercice 52.

- Soit (u_n) une suite décroissante qui tend vers 0 quand $n \rightarrow +\infty$. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$S_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k u_k.$$
 - Montrer que $(S_{2n})_n$ et $(S_{2n+1})_n$ sont adjacentes.
 - Montrer alors que $\sum_{k \geq 0} (-1)^k u_k$ est convergente.
 - Montrer que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, le reste R_n d'indice n vérifie : $|R_n| \leq u_{n+1}$. (On pourra considérer les cas pairs et impairs)
- Pour quelles valeurs de $\alpha \in \mathbb{R}$, la série $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ est-elle absolument convergente? semi-convergente?

Exercice 53.

Pour tout $r \in \mathbb{N}$ et tout $q \in]0, 1[$, on pose : $S_n(r) = \sum_{k=r}^n \binom{k}{r} q^{k-r}$.

- Écrire et déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(0)$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(1)$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(2)$.
- Montrer que : $\binom{n}{r+1} \sim_{+\infty} \frac{n^{r+1}}{(r+1)!}$ et en déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \binom{n}{r+1} q^{n-r} = 0$.
- (a) Montrer que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à $r+1$:

$$(1-q)S_n(r+1) = S_{n-1}(r) - \binom{n}{r+1} q^{n-r}$$

- On suppose que pour un certain entier naturel r , la série $\sum_{k \geq r} \binom{k}{r} q^{k-r}$ converge et que sa somme vaut :

$$\sum_{k=r}^{+\infty} \binom{k}{r} q^{k-r} = \frac{1}{(1-q)^{r+1}}$$

Montrer alors que la série $\sum_{k \geq r+1} \binom{k}{r+1} q^{k-r-1}$ converge et que sa somme vaut :

$$\sum_{k=r+1}^{+\infty} \binom{k}{r+1} q^{k-r-1} = \frac{1}{(1-q)^{r+2}}$$

- Conclure par récurrence sur r que $\sum_{k \geq r} \binom{k}{r} q^{k-r}$ converge pour tout $r \in \mathbb{N}$ et que :

$$\sum_{k=r}^{+\infty} \binom{k}{r} q^{k-r} = \frac{1}{(1-q)^{r+1}}$$

Exercice 54.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- Déterminer la dérivée $n^{\text{ème}}$ de la fonction f définie sur \mathbb{R}^+ par $f(x) = \ln(1+x)$.
- Appliquer l'inégalité de Taylor-Lagrange pour montrer que, pour tout $x > 0$,

$$\left| \ln(1+x) - \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k \right| \leq \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

3. En déduire la convergence et la somme de la série $\sum_{k \geq 1} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$.

Exercice 55.

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$u_n = \left(\sum_{k=1}^n k^2 \right)^{-1}, \quad v_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \quad \text{et} \quad w_n = v_n - \ln n$$

On veut montrer que la série $\sum u_n$ converge et calculer sa somme.

1. (a) Montrer que, (w_n) est décroissante.
 (b) Donner les DL d'ordre 2 au voisinage de 0 de $x \mapsto \ln(1+x)$ et $x \mapsto \frac{1}{1+x}$.
 (c) En déduire que $w_n - w_{n+1} = \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$.
 (d) En déduire que la suite (w_n) converge. (On note γ sa limite).
2. Donner un équivalent de u_n et en déduire que la série $\sum u_n$ converge.
3. (a) Déterminer $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$u_n = \frac{a}{n} + \frac{b}{n+1} + \frac{c}{2n+1}$$

(b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\sum_{k=1}^n \frac{1}{2k+1} = v_{2n+1} - \frac{1}{2}v_n - 1$

(c) En utilisant $v_{n+1} = v_n + \frac{1}{n+1}$, montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\sum_{k=1}^n u_k = 24(v_n - v_{2n+1}) + 24 - \frac{6n}{n+1}$$

(d) En déduire la valeur de la somme $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$.

Exercice 56. (Formule de Stirling)

On rappelle les résultats obtenus grâce aux intégrales de Wallis :

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n t dt \quad ; \quad I_{2n} = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad I_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$$

et on pose, pour tout entier $n \geq 2$:

$$A_n = \frac{1}{n!} n^n e^{-n} \sqrt{n} \quad ; \quad a_n = -1 - \left(n - \frac{1}{2}\right) \ln \left(1 - \frac{1}{n}\right)$$

1. Écrire le DL d'ordre 3 en 0 de $x \mapsto \ln(1+x)$ et en déduire que la série $\sum a_n$ converge.
2. Montrer que, pour tout entier $n \geq 2$, $\ln A_n - \ln A_{n-1} = a_n$
3. En déduire que la suite (A_n) converge vers une limite $\alpha > 0$.
4. En déduire que : $n! \underset{+\infty}{\sim} \frac{n^n}{\alpha} e^{-n} \sqrt{n}$.
5. Montrer alors, grâce au rappel, que $\alpha = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ et $n! \underset{+\infty}{\sim} \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$.

3.7 Probabilités discrètes

Exercice 57.

Une puce se déplace sur une demi-droite d'origine O par sauts successifs d'une ou deux unités vers la droite en suivant la procédure suivante :

- Au départ la puce est en O .
 - Les sauts sont indépendants.
 - À tout instant, la probabilité d'un saut d'une ou deux unités est la même et vaut $\frac{1}{2}$.
1. Soit $n \in \mathbb{N}$. On note S_n (respectivement C_n) la variable aléatoire égale au nombre de sauts d'une unité (respectivement deux unités) au bout de n sauts. Déterminer les lois de S_n et C_n ainsi que leur espérance.
 2. On note X_n la variable aléatoire égale à l'abscisse de la puce après n sauts. Déterminer $X_n(\Omega)$.
 3. Déterminer une relation entre S_n , C_n et n .
 4. Déterminer une relation entre S_n , C_n et X_n .
 5. En déduire la loi de X_n .
 6. Déterminer l'espérance et la variance de X_n .
 7. Soit Y_n la variable aléatoire égale au nombre de sauts nécessaires pour atteindre ou dépasser le point d'abscisse n . Déterminer $Y_n(\Omega)$ en fonction de la parité de n .
 8. Démontrer que, pour tout entier $n \geq 2$ et tout entier $k \geq 1$:

$$P(Y_n = k) = \frac{1}{2}P(Y_{n-1} = k-1) + \frac{1}{2}P(Y_{n-2} = k-1)$$

Exercice 58.

Une roulette est composée de secteurs équiprobables numérotés de 1 à N . On lance la boule successivement et on note les résultats R_1, R_2, \dots . On s'arrête de jouer dès que $R_{n-1} \leq R_n$. Soit X_N la variable aléatoire réelle égale au nombre de lancers de la boule. On pose enfin pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $q_n = P(X_N > n)$.

1. Déterminer $X_N(\Omega)$.
2. En considérant N lancers consécutifs, X_N est alors la *v.a.r.* égale au nombre $n \in X_N(\Omega)$ de résultats (R_i) tels que : $R_1 > R_2 > \dots > R_{n-1}$ et $R_{n-1} \leq R_n$. En déduire $\text{Card}(X_N > n)$, puis q_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
3. En déduire la loi de X_N , puis calculer l'espérance de X_N .
4. Déterminer alors : $\lim_{N \rightarrow +\infty} E(X_N)$.

Exercice 59. (D'après EDHEC 2011)

On considère un entier naturel n supérieur ou égal à 2. On dispose d'une urne contenant $2n$ boules numérotées de 1 à n , chaque boule apparaissant deux fois. On effectue « au hasard » une succession de tirages simultanés de deux boules de cette urne selon le protocole suivant :

- à chaque tirage de deux boules, si les deux boules tirées portent le même numéro, on ne remet pas les deux boules dans l'urne et on dit qu'une paire est constituée.
- si les deux boules tirées portent des numéros différents, on les remet dans l'urne avant de procéder au tirage suivant.

Pour tout élément i de $\llbracket 1, n \rrbracket$, on note T_i la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires pour constituer i paires.

1. (a) Déterminer la loi de T_1 et reconnaître cette loi.
 (b) Donner, sans calcul, la valeur de l'espérance de T_1 .
2. Compléter la partie principale du programme suivant afin qu'il affiche une réalisation de la variable T_1 :

```
import numpy.random as rd
t, a, b = 0, 0, 1
while _____:
    a = rd.randint(1, n);
    b = rd.randint(1, n);
    t = t+1
print(t)
```

3. On pose $X_1 = T_1$ et pour tout i de $\llbracket 2, n \rrbracket$: $X_i = T_i - T_{i-1}$.
 - (a) Que représente la variable X_i ?
 - (b) Déterminer, pour tout i de $\llbracket 1, n \rrbracket$ la loi de X_i ainsi que son espérance.
 - (c) En déduire que T_n admet une espérance et que $E(T_n) = n^2$.
4. On effectue une suite de n tirages de deux boules selon le protocole précédent. On note S_n la variable aléatoire égale au nombre de paires reconstituées lors de ces n tirages.
 - (a) Calculer $P(S_n = 0)$.
 - (b) Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(S_n = 0)$.
 - (c) Montrer que : $P(S_n = n) = \frac{n!2^n}{(2n)!}$.

Exercice 60.

On considère une urne contenant initialement b boules blanches et n boules noires, avec b et n des entiers naturels non nuls. On effectue alors des tirages successifs selon le procédé suivant :

- Si la boule tirée est blanche alors on la remet dans l'urne
- Si la boule tirée est noire alors on la remplace par une boule blanche.

Soit Y la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires à l'obtention d'une première boule blanche.

1. Déterminer l'ensemble des valeurs prises par Y .
2. Exprimer la loi de Y à l'aide de produits.
3. Vérifier alors que $P(Y = n + 1) = \frac{n!}{(b + n)^n}$ et, pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on a :

$$P(Y = k) = \frac{n!}{(n - (k - 1))!(b + n)^{k-1}} - \frac{n!}{(n - k)!(b + n)^k}$$

4. Soit $(a_0, \dots, a_m) \in \mathbb{R}^{m+1}$, montrer que :

$$\sum_{k=0}^m k(a_{k-1} - a_k) = \left(\sum_{k=0}^{m-1} a_k \right) - ma_m$$

5. En déduire que $E(Y) = \sum_{k=0}^n \frac{n!}{(n - k)!(b + n)^k}$.

6. On suppose que l'on dispose d'une fonction *Python* factorielle(n) qui retourne la valeur $n!$. Écrire à l'aide de la fonction factorielle une fonction *esperance*(n, b) qui calcule $E(Y)$ en fonction de n et b .

Exercice 61.

Soit $a > 0$ et X une variable aléatoire de support $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad P(X = n + 1) = \frac{a}{n} P(X = n)$$

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = (n - 1)! P(X = n)$.
Déterminer u_n en fonction de a , n et $P(X = 1)$.
2. Utiliser le *s.c.e.* associé à X pour calculer $P(X = 1)$ et en déduire la loi de X .
3. On pose $Y = X - 1$. Déterminer la loi de Y , son espérance et sa variance.
4. En déduire l'espérance et la variance de X .

Exercice 62.

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et X une *v.a.r.* telle que $X(\Omega) = \llbracket 0, n \rrbracket$.

1. Montrer que $E(X) = \sum_{k=1}^n P(X \geq k)$.
2. On suppose maintenant que $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et que $\sum_{k \geq 0} P(X \geq k)$ converge. Montrer que X admet une espérance et que $E(X) = \sum_{k=1}^{+\infty} P(X \geq k)$.
3. Soient X_1, X_2, X_3 trois *v.a.r.* suivant chacune une loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$. On suppose que ces variables sont mutuellement indépendantes (*i.e.* : $\forall (i, j, k) \in (\mathbb{N}^*)^3$, les événements $(X_1 = i)$, $(X_2 = j)$ et $(X_3 = k)$ sont mutuellement indépendants).
On pose alors $S = \max(X_1, X_2, X_3)$. Déterminer la loi de S .
4. Montrer que S possède une espérance et la calculer (on utilisera 2.).

Exercice 63.

Soient X et Y deux *v.a.r.* indépendantes suivant respectivement la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$ et la loi de Poisson de paramètre $\mu > 0$.

1. Rappeler le support, la loi, l'espérance et la variance de X .
2. On pose $S = X + Y$. Déterminer $S(\Omega)$.
3. Soit $n \in \mathbb{N}$, écrire l'événement $(S = n)$ comme une union finie d'événements deux à deux disjoints faisant intervenir X et Y .
4. En déduire la loi de S .
5. Soient $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$. Déterminer $P_{(S=n)}(X = k)$ puis reconnaître la loi $P_{(S=n)}$.

Exercice 64.

Soient X et Y deux *v.a.r.* indépendantes suivant toutes les deux la loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$.

1. Rappeler le support, la loi, l'espérance et la variance de X .

2. On pose $S = X + Y$. Déterminer $S(\Omega)$.
3. Soit $n \in \mathbb{N}$, écrire l'événement $(S = n)$ comme une union finie d'événements deux à deux disjoints faisant intervenir X et Y .
4. En déduire la loi de S .
5. On pose $T = \min(X, Y)$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer $P(T \geq n)$, puis en déduire la loi de T .

Exercice 65.

$n \geq 3$ joueurs J_1, \dots, J_n participent au jeu suivant :

Une pièce équilibrée est lancée $(2p + 1)$ fois ($p \in \mathbb{N}^*$), mais avant les lancers, chaque joueur écrit une liste de $(2p + 1)$ caractères P ou F correspondant aux prévisions, dans l'ordre, pour ces lancers. Les gagnants sont les joueurs ayant le plus de prévisions correctes et ils se partagent équitablement $n!$ euros. Pour $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on note X_i la *v.a.r.* égale au nombre de prévisions correctes du joueur J_i et G_i la *v.a.r.* égale aux gains du joueur J_i .

1. Déterminer la loi de X_i , son espérance et sa variance.
2. On pose $S_p = \sum_{k=0}^p \binom{2p+1}{k}$ et $T_p = \sum_{k=p+1}^{2p+1} \binom{2p+1}{k}$.
 - (a) Calculer $S_p + T_p$.
 - (b) Montrer que $S_p = T_p$.
 - (c) En déduire la valeur de S_p et $P(X_i \leq p)$.
3. On suppose les X_i mutuellement indépendantes. On pose, pour tout $k \in X_i(\Omega)$, $q_k = P(X_i = k)$ et $r_k = P(X_i \leq k)$
 - (a) Montrer que $G_1(\Omega) = \left\{ \frac{n!}{j+1} \mid j \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket \right\} \cup \{0\}$.
 - (b) Montrer que $P_{(X_1=0)} \left(G_1 = \frac{n!}{n} \right) = q_0^{n-1}$.
 - (c) Montrer que pour tout $j \in \llbracket 0, n-2 \rrbracket$, $P_{(X_1=0)} \left(G_1 = \frac{n!}{j+1} \right) = 0$.

4 Quelques petits problèmes

4.1 Problème I (comparaison série-intégrale)

Soit $n_0 \in \mathbb{N}$.

On considère une application $f : [n_0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$, **continue, décroissante et positive**. De plus, pour tout entier $n \geq n_0$, on notera :

$$S_n = \sum_{k=n_0}^n f(k) \quad \text{et} \quad I_n = \int_{n_0}^n f(t) dt$$

But du problème :

Montrer que, sous ces conditions, les suites $(S_n)_{n \geq n_0}$ et $(I_n)_{n \geq n_0}$ sont de **même nature**.

De plus, **si elles divergent** alors on a : $S_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} I_n$.

1. Faire une figure où S_n et I_n seront représentés pour un $n \geq n_0$ fixé.
2. Montrer que $(S_n)_{n \geq n_0}$ et $(I_n)_{n \geq n_0}$ sont monotones.
3. Montrer que pour tout entier $k \geq n_0$,

$$f(k+1) \leq \int_k^{k+1} f(t) dt \leq f(k)$$

et en déduire que : $S_n - f(n_0) \leq I_n \leq S_n - f(n)$.

4. Démontrer alors le but du problème.

5. Applications :

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

- (a) Dans le cas où $\alpha \in]0, 1[$, donner un équivalent de S_n : la somme partielle de rang n associée à la série de Riemann de paramètre α .
- (b) Dans toute la suite, $\alpha > 1$. Redémontrer la convergence de la série de Riemann de paramètre α .
- (c) Justifier, pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, l'existence de :

$$R_m = \sum_{k=m+1}^{+\infty} f(k) \quad \text{et} \quad J_m = \int_m^{+\infty} f(t) dt$$

- (d) Démontrer que :

$$J_m - f(m) \leq R_m \leq J_m$$

puis en déduire un équivalent de R_m quand $m \rightarrow +\infty$.

4.2 Problème II (Fonction génératrice d'une v.a.r.)

Soient a un entier naturel et X une v.a.r. sur un espace probabilisé (Ω, \mathcal{F}, P) telle que $X(\Omega) = [a, +\infty[$.

1. Montrer que, pour tout $t \in [-1, 1]$, la v.a.r. t^X possède une espérance.
 On notera alors G l'application appelée fonction génératrice de X , définie sur $[-1, 1]$ par :

$$\forall t \in [-1, 1], \quad G(t) = E(t^X) = \sum_{k=a}^{+\infty} t^k P([X = k])$$

2. (a) Déterminer G dans le cas où X suit une loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$.
 (b) Déterminer G dans le cas où X suit une loi de poisson de paramètre $\lambda > 0$.

Dans toute la suite, on admet que X est une v.a.r. qui admet des moments d'ordre 1 et 2.

3. (a) Soit $t \in [-1, 1[$.
 En utilisant l'ingégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre 1 avec la fonction $x \mapsto x^k$ entre t et $t+h$, montrer que, pour tout $h > 0$ tel que $t+h \in [-1, 1[$:

$$\left| G(t+h) - G(t) - h \sum_{k=a}^{+\infty} k P([X = k]) t^{k-1} \right| \leq \frac{h^2}{2} \sum_{k=a}^{+\infty} k(k-1) P([X = k])$$

(b) En déduire G est dérivable à droite en tout point de $[-1, 1[$ (on donnera l'expression de cette dérivée à l'aide d'une somme).

4. (a) Soit $t \in]-1, 1]$.

De la même manière, montrer que, pour tout $h \leq 0$ tel que $t + h \in]-1, 1]$:

$$\left| G(t+h) - G(t) - h \sum_{k=a}^{+\infty} k P([X = k]) t^{k-1} \right| \leq \frac{h^2}{2} \sum_{k=a}^{+\infty} k(k-1) P([X = k])$$

(b) En déduire G est dérivable à gauche en tout point de $] - 1, 1]$.

5. À l'aide de 3. et 4., montrer que G est dérivable sur $[-1, 1]$ et

$$\forall t \in [-1, 1], \quad G'(t) = \sum_{k=a}^{+\infty} k t^{k-1} P([X = k])$$

De la même manière, si X admet un moment d'ordre 2, avec l'I.T.L. à l'ordre 2, on peut montrer que (mais on ne demande pas de le démontrer et on l'admettra) G est de classe \mathcal{C}^2 sur $[-1, 1]$ et :

$$\forall t \in [-1, 1], \quad G''(t) = \sum_{k=a}^{+\infty} k(k-1) t^{k-2} P([X = k])$$

6. Déterminer alors l'expression de l'espérance et de la variance de X en fonction de $G'(1)$ et $G''(1)$, puis retrouver les valeurs connues dans le cas de 2.(a) et 2.(b).

4.3 Problème III (Variables discrètes)

Soit n un entier naturel non nul.

On effectue une série illimitée de tirages d'une boule avec remise dans une urne contenant n boules numérotées de 1 à n . Pour tout entier naturel k non nul, on note X_k la variable aléatoire égale au numéro de la boule obtenue au $k^{\text{ème}}$ tirage. On admettra par la suite que les variables $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$

sont indépendantes et que donc, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et tout $(x_1, \dots, x_k) \in \llbracket 1, n \rrbracket^k$, $P\left(\bigcap_{i=1}^k [X_i = x_i]\right) =$

$\prod_{i=1}^k P([X_i = x_i])$. Pour tout entier naturel k non nul, on note S_k la somme des numéros des boules

obtenues lors des k premiers tirages : $S_k = \sum_{i=1}^k X_i$.

On considère enfin la variable aléatoire T_n égale au nombre de tirages nécessaires pour que, pour la première fois, la somme des numéros des boules obtenues soit supérieure ou égale à n .

Un exemple : avec $n = 10$, si les numéros obtenus aux cinq premiers tirages sont dans cet ordre 2, 4, 1, 5, 9, alors on obtient : $S_1 = 2$, $S_2 = 6$, $S_3 = 7$, $S_4 = 12$, $S_5 = 21$ et $T_{10} = 4$.

Partie A

1. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, déterminer la loi de X_k ainsi que son espérance.

2. (a) Déterminer $T_n(\Omega)$.

(b) Calculer $P([T_n = 1])$.

(c) Montrer que : $P([T_n = n]) = \left(\frac{1}{n}\right)^{n-1}$.

3. Dans cette question, $n = 2$. Déterminer la loi de T_2 .
 4. Dans cette question, $n = 3$. Donner la loi de T_3 . Vérifier que $E(T_3) = \frac{16}{9}$.

Partie B

1. Déterminer $S_k(\Omega)$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.
 2. Soit $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$.
 (a) Exprimer S_{k+1} en fonction de S_k et de X_{k+1} .
 (b) En utilisant un système complet d'événements lié à la variable aléatoire S_k , démontrer alors que :

$$\forall i \in \llbracket k+1, n \rrbracket, \quad P([S_{k+1} = i]) = \frac{1}{n} \sum_{j=k}^{i-1} P([S_k = j]).$$

 3. (a) Pour $k \in \mathbb{N}^*$ et $j \in \mathbb{N}^*$, rappeler la formule du triangle de Pascal liant les nombres : $\binom{j-1}{k-1}$, $\binom{j-1}{k}$ et $\binom{j}{k}$.
 (b) En déduire que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et pour tout entier naturel i supérieur ou égal à $k+1$:

$$\sum_{j=k}^{i-1} \binom{j-1}{k-1} = \binom{i-1}{k}.$$

- (c) Pour tout entier $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on note \mathcal{H}_k la proposition :

$$\llcorner \forall i \in \llbracket k, n \rrbracket, \quad P([S_k = i]) = \frac{1}{n^k} \binom{i-1}{k-1} \llcorner.$$

Démontrer par récurrence que pour tout entier $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, \mathcal{H}_k est vraie.

4. (a) Soit $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$. Comparer les événements : $[T_n > k]$ et $[S_k \leq n-1]$.
 (b) En déduire que : $\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \quad P([T_n > k]) = \frac{1}{n^k} \binom{n-1}{k}$.
 5. Démontrer que $E(T_n) = \sum_{k=0}^{n-1} P([T_n > k])$, puis que $E(T_n) = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n-1}$.
 6. Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} E(T_n)$.

4.4 Problème IV (Intégrales impropres et formule de Taylor)

1. Question de cours : rappeler la formule de Taylor avec reste intégral.
 2. Pour $x \in [0, 1[$, on pose $h(x) = \ln(1-x)$. Calculer les dérivées successives de la fonction h .
 3. Pour $x \in [0, 1[$, on note g_x la fonction définie sur $[0, x]$ par

$$g_x(t) = \frac{t-x}{t-1}$$

Étudier les variations de g_x .

4. Montrer pour $x \in]0, 1[$ et p entier naturel,

$$\left| \int_0^x h^{(p+1)}(t) \frac{(x-t)^p}{p!} dt \right| \leq x^p |\ln(1-x)|$$

5. Montrer que la fonction

$$f : x \in]0, 1[\mapsto f(x) = \ln(x^2) \ln(1-x^2)$$

est bornée sur $]0, 1[$.

6. On pose

$$J = \int_0^1 \frac{f(x)}{x^2} dx$$

Montrer la convergence de J .

7. Pour n entier naturel, on pose

$$I_n = - \int_0^1 \frac{x^{2n} \ln(x^2)}{n+1} dx$$

Calculer I_n après avoir justifié son existence.

8. Écrire la formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre p , pour la fonction h entre 0 et x^2 , pour $x \in]0, 1[$.

En déduire :

$$\int_0^1 \frac{f(x)}{x^2} dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2}{(n+1)(2n+1)^2}$$

5 Exercices à rendre sur feuille pour la rentrée (Extrait d'EDHEC 2026)

5.1 Exercice 1

Dans cet exercice, on pourra utiliser sans démonstration les formules

$$\cos(2a) = 2\cos^2(a) - 1 \quad \text{et} \quad \sin(2a) = 2\sin(a)\cos(a).$$

On rappelle le développement limité à l'ordre 5 de la fonction sinus au voisinage de 0 :

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5).$$

1. Montrer que l'on définit parfaitement deux suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ en posant $u_1 = 0$, $v_1 = 2$ et, pour tout entier naturel n non nul :

$$u_{n+1} = \sqrt{\frac{1+u_n}{2}} \quad \text{et} \quad v_{n+1} = \frac{v_n}{u_{n+1}}.$$

2. Compléter la fonction Python suivante afin qu'elle renvoie v_n .

```
def suite_v(n):  
    u = 0  
    v = 2  
    for k in range(2, n+1):  
        ...  
        ...  
    return v
```

3. (a) Montrer qu'il existe une unique suite $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ dont les éléments appartiennent à $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \cos(\alpha_n).$$

- (b) Expliciter α_n en fonction de n , pour tout n de \mathbb{N}^* .
- (c) En déduire que, pour tout n de \mathbb{N}^* , on a

$$v_n = 2^n \sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right)$$

puis donner la valeur de $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$.

4. Déterminer les constantes réelles a , b et c telles que :

$$v_n = a + \frac{b}{4^n} + \frac{c}{4^{2n}} + o\left(\frac{1}{4^{2n}}\right) \quad (n \rightarrow +\infty).$$

5. Accélération de convergence par la méthode de Richardson.

On pose, pour tout n de \mathbb{N}^* :

$$w_n = \frac{4v_{n+1} - v_n}{3}.$$

- (a) Écrire en Python une fonction `suite_w` utilisant la fonction `suite_v` et qui renvoie w_n .
- (b) Donner la limite de w_n .

(c) Montrer que

$$w_n = \pi - \frac{\pi^5}{480 \times 4^{2n}} + o\left(\frac{1}{4^{2n}}\right) \quad (n \rightarrow +\infty),$$

puis déterminer un équivalent de $\frac{w_n - \pi}{v_n - \pi}$ lorsque $n \rightarrow +\infty$.

(d) Dans le cadre de la recherche d'une valeur approchée de π , quel intérêt y a-t-il à utiliser la suite $(w_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ plutôt que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$?

6. Généralisation de la méthode de Richardson.

Étant donnés deux réels q et r de $]0, 1[$ tels que $q > r$, on considère une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ vérifiant :

$$\exists (a, b, c) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*, \quad x_n = a + b q^n + c r^n + o(r^n) \quad (n \rightarrow +\infty).$$

(a) Définir une suite $(y_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ dont le terme général est combinaison linéaire de x_n et x_{n+1} , qui vérifie

$$y_n = a + d r^n + o(r^n) \quad (n \rightarrow +\infty),$$

où d est une constante à déterminer en fonction de c , q et r .

(b) Montrer que

$$x_n = a + b q^n + o(q^n) \quad (n \rightarrow +\infty).$$

(c) En déduire que la suite $(y_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers a plus rapidement que la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

5.2 Exercice 2

On suppose que toutes les variables aléatoires de cet exercice sont définies sur un certain espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

Partie 1

Un mobile se déplace aléatoirement sur un axe dont l'origine est le point O d'abscisse 0.

Au départ (instant 0), le mobile est situé sur le point O .

Le mobile se déplace selon la règle suivante : à chaque instant k ($k \in \mathbb{N}^*$), il se place de façon équiprobable sur l'un des points d'abscisses $0, 1, \dots, k$.

Pour tout entier naturel k , on note X_k la variable aléatoire égale à l'abscisse de ce point à l'instant k (on a donc $X_0 = 0$).

On admet que $(X_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes.

- Déterminer, pour tout entier naturel k non nul, la loi de X_k .
 - Montrer que, pour tout entier naturel k non nul, X_k possède une espérance et une variance, puis calculer $\mathbb{E}(X_k)$ et $\mathbb{V}(X_k)$.
- On note Y la variable aléatoire égale au rang du premier retour à l'origine du mobile (sans prendre en compte son positionnement au départ) et on pose $Y = 0$ s'il n'y a aucun retour à l'origine.
 - Pour tout entier naturel n non nul, exprimer l'événement $(Y = n)$ à l'aide des variables aléatoires X_1, X_2, \dots, X_n .

(b) En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{P}(Y = n) = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}.$$

(c) Déterminer par le calcul la valeur de $\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(Y = n)$. En déduire $\mathbb{P}(Y = 0)$.

(d) La variable Y admet-elle une espérance ?

Partie 2

On désigne par n un entier naturel supérieur ou égal à 1 et on considère une variable aléatoire U_n telle que $U_n(\Omega) = \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ et qui suit la loi uniforme sur $\llbracket 0, n-1 \rrbracket$.

Pour tout $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, on considère également une variable aléatoire Z_n dont la loi, conditionnellement à l'événement $(U_n = k)$, est la loi géométrique de paramètre $1 - \frac{k}{n}$.

3. Simulation informatique de Z_n .

Compléter la fonction suivante afin qu'elle simule U_n et Z_n et renvoie la valeur prise par Z_n .

```
def var_Z(n):
    U = -----
    Z = -----
    return Z
```

4. (a) Montrer que, pour tout i de \mathbb{N}^* , on a l'égalité :

$$\mathbb{P}(Z_n = i) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{k}{n}\right)^{i-1} - \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{k}{n}\right)^i$$

(b) En déduire la valeur de $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(Z_n = i)$.

(c) Conclure quant à la convergence en loi de la suite $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

5. Espérance de Z_n . (Pour les cubes uniquement)

Justifier que l'on peut utiliser la formule de l'espérance totale puis établir que l'espérance de Z_n est donnée par :

$$\mathbb{E}(Z_n) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}.$$

6. Équivalent de $\mathbb{E}(Z_n)$ lorsque $n \rightarrow +\infty$.

(a) Montrer que, pour tout k de \mathbb{N}^* , on a :

$$\frac{1}{k+1} \leq \ln(k+1) - \ln(k) \leq \frac{1}{k}.$$

(b) Établir, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, l'encadrement :

$$\ln(n) + \frac{1}{n} \leq \mathbb{E}(Z_n) \leq 1 + \ln(n).$$

(c) En déduire un équivalent de $\mathbb{E}(Z_n)$.