

ECG1 – Travail de révision Rentrée 2026

Ce document s'adresse aux futurs étudiants d'ECG1 (sortant de terminale, spécialité mathématiques). Il rappelle, dans une **première partie**, les connaissances de cours que vous devez maîtriser à la rentrée. Une **seconde partie** propose des exercices, d'abord d'entraînement quasi-mécanique, puis d'approfondissement.

Prenez le temps de revenir plusieurs fois sur ce document avant la rentrée : relisez les rappels en vous interrogeant sur le *pourquoi* et le *quand* d'une formule, refaites les exercices, vérifiez vos réponses. En septembre, il est attendu que ces bases soient parfaitement assimilées.

Première partie – Rappels de cours

1. Ensembles de nombres

- L'ensemble des entiers naturels : $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$.
- L'ensemble des entiers relatifs : $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$.
- L'ensemble des nombres rationnels : \mathbb{Q} , l'ensemble des nombres qui peuvent s'écrire sous la forme $\frac{p}{q}$ avec $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{Z}^*$.
- L'ensemble des nombres réels : \mathbb{R} .
- L'ensemble des nombres complexes : \mathbb{C} , l'ensemble des nombres du type $a + ib$ avec a et b réels et i tel que $i^2 = -1$.

On rencontrera aussi les ensembles suivants :

- $\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, \dots\}$ qui n'est autre que l'ensemble \mathbb{N} privé de 0.
- $\mathbb{R}^+ = [0, +\infty[$ et $\mathbb{R}_+^* =]0, +\infty[$.
- \mathbb{R}^2 qui désigne l'ensemble des couples de deux réels (x, y) .
- \mathbb{R}^3 qui désigne l'ensemble des triplets de trois réels (x, y, z) .

2. Calculs élémentaires

On rappelle les résultats suivants (quand ils ont un sens) :

Identités remarquables et valeur absolue.

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2, \quad (a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2, \quad (a + b)(a - b) = a^2 - b^2.$$

$$|a + b| \leq |a| + |b|, \quad ||a| - |b|| \leq |a - b|.$$

Puissances, exponentielle, logarithme.

$$a^p a^q = a^{p+q}, \quad \frac{a^p}{a^q} = a^{p-q}, \quad (a^p)^q = a^{pq}, \quad a^p b^p = (ab)^p.$$

$$e^a e^b = e^{a+b}, \quad \frac{e^a}{e^b} = e^{a-b}, \quad \frac{1}{e^{-a}} = e^a, \quad a = e^{\ln a} \quad (a > 0).$$

$$a^{1/2} = \sqrt{a}, \quad a^0 = 1 \text{ (convention)}, \quad e \simeq 2,718, \quad \ln e = 1.$$

$$\ln(ab) = \ln a + \ln b, \quad \ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b, \quad \ln(a^b) = b \ln a.$$

Pour chacune des égalités ci-dessus, prenez le temps de réfléchir pour quelles valeurs de a , b , p , q elles ont un sens : ces nombres doivent-ils être entiers, réels, positifs, non nuls... ?

3. Fonctions usuelles et graphiques

Les fonctions usuelles rencontrées au lycée sont à réviser. Pour chacune d'elles, posez-vous les questions suivantes :

1. Quel est le domaine de définition ?
2. Est-elle continue sur ce domaine ? Dérivable, et sur quel domaine ?
3. Quelles sont ses valeurs remarquables, ses limites aux bords, ses symétries ?

Les figures 1, 2 et 3 rappellent leurs graphes.

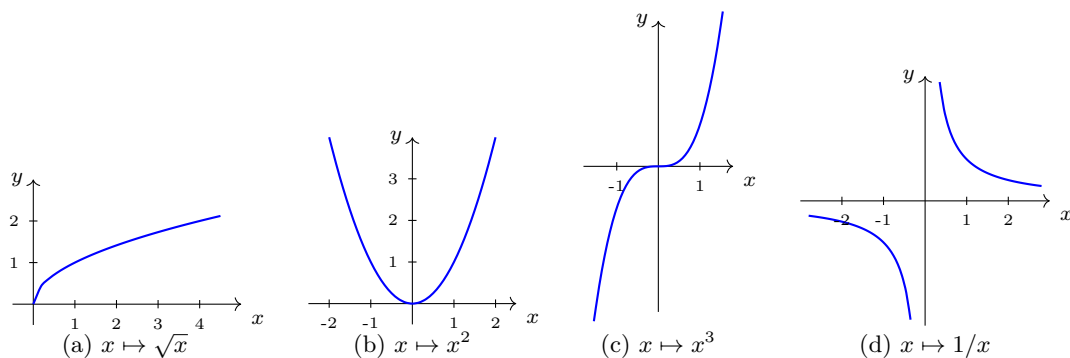


FIGURE 1 – Quelques fonctions puissance.

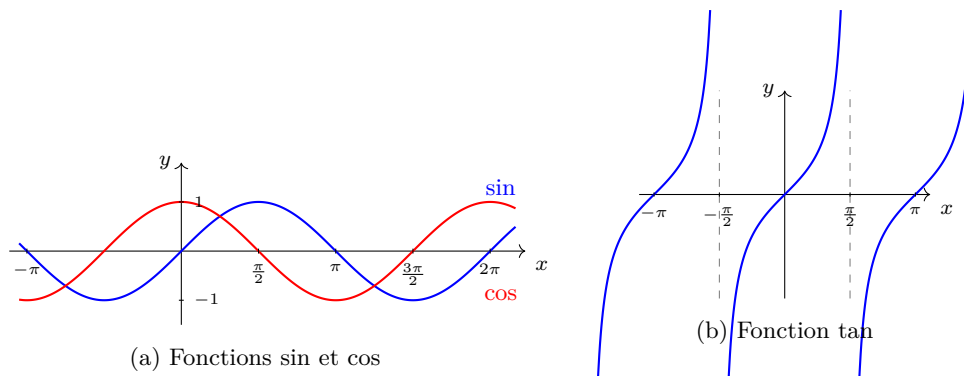


FIGURE 2 – Quelques fonctions trigonométriques.

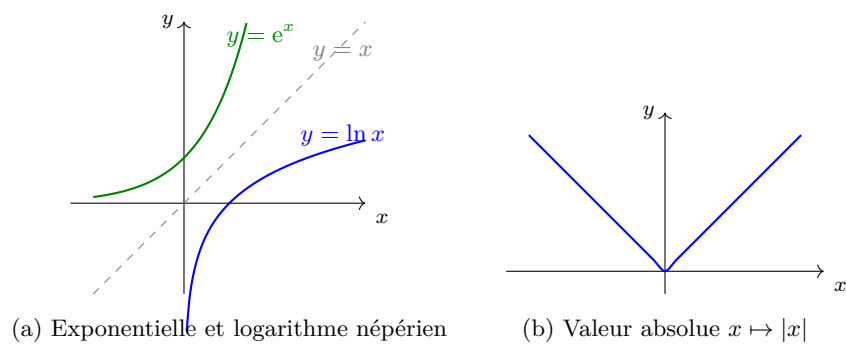


FIGURE 3 – Quelques autres fonctions fondamentales.

4. Trigonométrie

Valeurs usuelles

θ (rad)	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$\sin \theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\cos \theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1

Ces valeurs se lisent sur le cercle trigonométrique (figure 4).

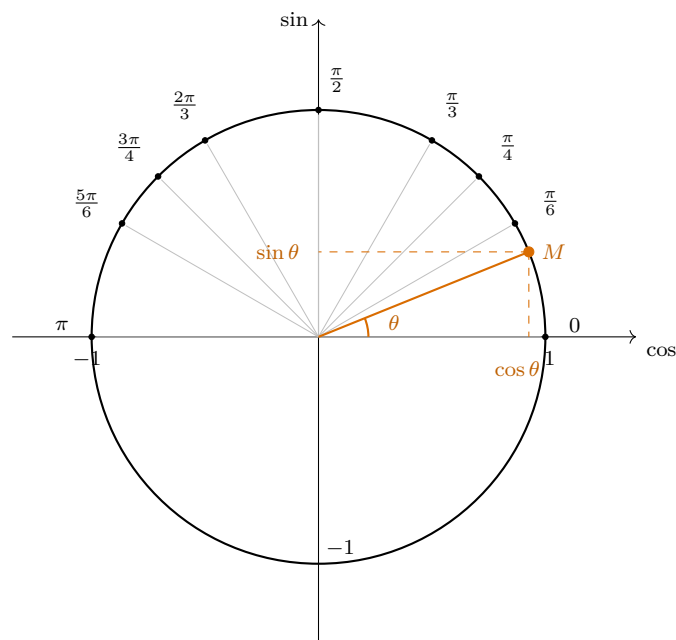


FIGURE 4 – Cercle trigonométrique. Pour un angle orienté θ , le point M associé sur le cercle a pour coordonnées $(\cos \theta, \sin \theta)$: l'abscisse de M donne $\cos \theta$, son ordonnée donne $\sin \theta$. Les valeurs remarquables se lisent ainsi sur le cercle en projetant sur les axes.

Identité fondamentale, parité, déphasage

Identité fondamentale. Pour tout $a \in \mathbb{R}$,

$$\cos^2 a + \sin^2 a = 1.$$

Parité et périodicité. La fonction $x \mapsto \cos x$ est paire, la fonction $x \mapsto \sin x$ est impaire. Toutes deux sont 2π -périodiques.

Formules.

$$\sin(-a) = -\sin a, \quad \cos(-a) = \cos a, \quad \sin(\pi - a) = \sin a, \quad \cos(\pi - a) = -\cos a.$$

$$\sin\left(a + \frac{\pi}{2}\right) = \cos a, \quad \sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \cos a,$$

$$\cos\left(a + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin a, \quad \cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \sin a.$$

Formules d'addition.

$$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b, \quad \sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b,$$

$$\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b, \quad \sin(a - b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b.$$

Formules de duplication.

$$\sin 2a = 2 \sin a \cos a, \quad \cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 2 \cos^2 a - 1 = 1 - 2 \sin^2 a.$$

5. Limites de fonctions**Limites de référence****En $+\infty$:**

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x^\alpha = +\infty \quad (\alpha > 0),$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^\alpha} = 0 \quad (\alpha > 0).$$

En $-\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty.$$

En 0 :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty.$$

Taux de variation classiques (limites en 0) :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Croissances comparéesPour tous réels $\alpha > 0$ et $\beta > 0$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)^\alpha}{x^\beta} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^\alpha}{e^{\beta x}} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} x^\alpha \ln x = 0.$$

En résumé : l'exponentielle l'emporte sur toute puissance, et toute puissance l'emporte sur le logarithme.

Opérations et formes indéterminées

Les opérations sur les limites (somme, produit, quotient, composée) se font selon les règles habituelles. Les **formes indéterminées** (FI) à reconnaître sont les suivantes :

$$\infty - \infty, \quad 0 \times \infty, \quad \frac{0}{0}, \quad \frac{\infty}{\infty}, \quad 1^\infty, \quad 0^0, \quad \infty^0.$$

Face à une FI, on cherche à transformer l'expression (factoriser, mettre en facteur le terme dominant, utiliser une croissance comparée, etc.).

Mini-exercice. Déterminer les limites suivantes :

- (a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^3}$
 (b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$
 (c) $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x$
 (d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - x)$

6. Continuité, théorème des valeurs intermédiaires

Continuité

Définition. Soit f une fonction définie sur un intervalle I , et $x_0 \in I$. On dit que f est *continue* en x_0 si

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

On dit que f est continue sur I si elle est continue en tout point de I .

Propriétés.

- Les fonctions polynomiales, \exp , \ln , \sin , \cos , $\sqrt{\cdot}$, valeur absolue, sont continues sur leur domaine de définition.
- Somme, produit, quotient (si dénominateur non nul) et composée de fonctions continues sont continues.
- Toute fonction dérivable sur I est continue sur I . (La réciproque est fautive : $x \mapsto |x|$ est continue mais non dérivable en 0.)

Théorème des valeurs intermédiaires

Théorème (TVI). Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$, et soit k un réel compris entre $f(a)$ et $f(b)$. Alors il existe au moins un réel $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = k$.

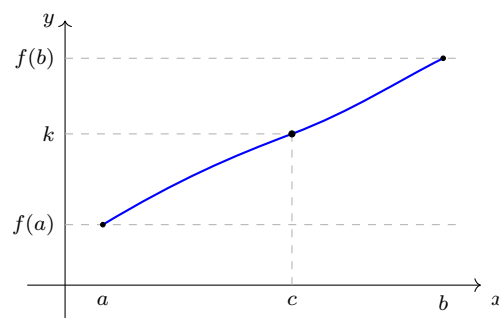


FIGURE 5 – Illustration du théorème des valeurs intermédiaires.

Corollaire (théorème de la bijection). Si f est continue et *strictement monotone* sur $[a, b]$, alors f réalise une bijection de $[a, b]$ sur l'intervalle $[f(a), f(b)]$ (ou $[f(b), f(a)]$ si f est décroissante). En particulier, pour tout k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ admet une unique solution dans $[a, b]$.

Remarque. Ce résultat se généralise aux intervalles ouverts ou non bornés, en remplaçant $f(a)$ et $f(b)$ par les limites correspondantes.

Mini-exercice. Montrer que l'équation $x^3 + x - 1 = 0$ admet une unique solution réelle, et donner un encadrement de cette solution d'amplitude 0,5.

7. Dérivation

Définition et tableau des dérivées usuelles

Pour toute fonction f dérivable en $x_0 \in \mathbb{R}$:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0), \quad \text{ou encore} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0).$$

Tableau des dérivées usuelles. Sur leurs ensembles de définition, on a :

$f(x)$	$f'(x)$	$f(u(x))$	$(f(u(x)))'$
$x^\alpha, \alpha \in \mathbb{R}$	$\alpha x^{\alpha-1}$	$u^\alpha, \alpha \in \mathbb{R}$	$\alpha u' u^{\alpha-1}$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$\ln u$	$\frac{u'}{u}$
e^x	e^x	e^u	$u' e^u$
$\cos x$	$-\sin x$	$\cos u$	$-u' \sin u$
$\sin x$	$\cos x$	$\sin u$	$u' \cos u$
\sqrt{x}	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	\sqrt{u}	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$

Dérivée d'une composée

Formule générale. Si u est dérivable en x et f est dérivable en $u(x)$, alors $f \circ u$ est dérivable en x et

$$(f \circ u)'(x) = u'(x) \times f'(u(x)).$$

Les cas particuliers ci-dessus en sont des conséquences immédiates.

Tableau de variations type

Pour étudier les variations d'une fonction f , on calcule f' , on étudie son signe, on en déduit les variations de f , et on complète par les limites aux bords. Exemple avec $f(x) = xe^{-x}$ sur \mathbb{R} : on a $f'(x) = (1-x)e^{-x}$, de signe celui de $1-x$. On obtient :

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$		+	0 -
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow \frac{1}{e}$	$\searrow 0$

Mini-exercice. Soit $f(x) = \ln(1 + x^2)$. Déterminer le domaine de définition, calculer $f'(x)$, et dresser le tableau de variations de f sur \mathbb{R} .

8. Convexité

Définition. Une fonction f deux fois dérivable sur un intervalle I est dite *convexe* sur I si $f''(x) \geq 0$ pour tout $x \in I$, et *concave* si $f''(x) \leq 0$.

Interprétation géométrique. Si f est convexe sur I , alors la courbe de f est située *au-dessus de chacune de ses tangentes* et *en dessous de toute corde*. Pour une fonction concave, c'est l'inverse.

Point d'inflexion. Un point en lequel f'' change de signe est appelé un *point d'inflexion* de la courbe de f .

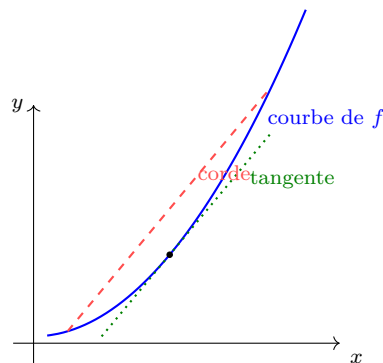


FIGURE 6 – Une fonction convexe : courbe au-dessus de ses tangentes, en dessous de ses cordes.

Quelques fonctions de référence.

- $x \mapsto x^2$, $x \mapsto e^x$ sont convexes sur \mathbb{R} .
- $x \mapsto \ln x$ est concave sur \mathbb{R}_+^* .
- $x \mapsto \sqrt{x}$ est concave sur \mathbb{R}_+ .
- $x \mapsto x^3$ est concave sur \mathbb{R}_- , convexe sur \mathbb{R}_+ : 0 est un point d'inflexion.

Mini-exercice. Étudier la convexité de la fonction $f(x) = xe^{-x}$ sur \mathbb{R} et préciser ses éventuels points d'inflexion.

9. Primitives et intégration

Définition. Soit f une fonction définie sur un intervalle I . Une *primitive* de f sur I est une fonction F dérivable sur I telle que $F'(x) = f(x)$ pour tout $x \in I$.

Deux primitives d'une même fonction sur un intervalle diffèrent d'une constante.

Lien primitive-intégrale. Si f est continue sur $[a, b]$ et F est une primitive de f sur $[a, b]$, alors

$$\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a).$$

Tableau de primitives usuelles. À une constante près :

$f(x)$	Une primitive	Forme avec u	Une primitive
$x^\alpha, \alpha \neq -1$	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$	$u' u^\alpha, \alpha \neq -1$	$\frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1}$
$\frac{1}{x} (x > 0)$	$\ln x$	$\frac{u'}{u} (u > 0)$	$\ln u$
e^x	e^x	$u' e^u$	e^u
$\cos x$	$\sin x$	$u' \cos u$	$\sin u$
$\sin x$	$-\cos x$	$u' \sin u$	$-\cos u$

Propriétés de l'intégrale. Pour f, g continues sur $[a, b]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\int_a^b (f + \lambda g) = \int_a^b f + \lambda \int_a^b g, \quad \int_a^b f = - \int_b^a f, \quad \int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f.$$

Positivité. Si $f \geq 0$ sur $[a, b]$ avec $a \leq b$, alors $\int_a^b f \geq 0$. **Croissance.** Si $f \leq g$ sur $[a, b]$ avec $a \leq b$, alors $\int_a^b f \leq \int_a^b g$.

Mini-exercice. Calculer les intégrales suivantes :

- (a) $\int_0^1 (x^2 - 3x + 1) dx$
- (b) $\int_1^e \frac{1}{x} dx$
- (c) $\int_0^1 x e^{x^2} dx$
- (d) $\int_0^1 \frac{2x}{x^2 + 1} dx$

10. Suites et récurrence (à un pas)

Suite arithmétique. Une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est arithmétique de raison $r \in \mathbb{R}$ lorsque

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + r.$$

On a alors $u_n = u_0 + nr$ et, pour $p \leq n$, $u_n = u_p + (n - p)r$.

Suite géométrique. Une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est géométrique de raison $q \in \mathbb{R}$ lorsque

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n \times q.$$

On a alors $u_n = u_0 \times q^n$ et, pour $p \leq n$, $u_n = u_p \times q^{n-p}$.

Raisonnement par récurrence. Pour démontrer qu'une propriété $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \geq n_0$, on procède en trois étapes :

1. **Initialisation.** On montre que $\mathcal{P}(n_0)$ est vraie.
2. **Hérédité.** On suppose que, pour un certain $n \geq n_0$, $\mathcal{P}(n)$ est vraie, et on en déduit que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
3. **Conclusion.** La propriété est initialisée et héréditaire, donc vraie pour tout $n \geq n_0$.

11. Limites de suites et théorèmes de convergence

Limites de suites usuelles

Suite géométrique q^n :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = \begin{cases} 0 & \text{si } |q| < 1, \\ 1 & \text{si } q = 1, \\ +\infty & \text{si } q > 1, \\ \text{n'existe pas} & \text{si } q \leq -1. \end{cases}$$

Puissances : pour $\alpha > 0$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^\alpha = +\infty$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^\alpha} = 0$.

Croissances comparées. Pour $\alpha > 0$, $\beta > 0$ et $q > 1$:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(\ln n)^\alpha}{n^\beta} = 0, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^\alpha}{q^n} = 0, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{q^n}{n!} = 0.$$

Théorèmes de convergence

Théorème de la limite monotone.

- Toute suite *croissante* et *majorée* converge.
- Toute suite *décroissante* et *minorée* converge.
- Toute suite croissante non majorée tend vers $+\infty$.

Théorèmes de comparaison. Soient (u_n) , (v_n) , (w_n) trois suites réelles, avec $u_n \leq v_n$ à partir d'un certain rang.

- Si $u_n \rightarrow +\infty$, alors $v_n \rightarrow +\infty$.
- Si $v_n \rightarrow -\infty$, alors $u_n \rightarrow -\infty$.

Théorème d'encadrement (« gendarmes »). Si $u_n \leq v_n \leq w_n$ à partir d'un certain rang, et si $u_n \rightarrow \ell$ et $w_n \rightarrow \ell$, alors $v_n \rightarrow \ell$.

Mini-exercice. Étudier la limite des suites suivantes :

(a) $u_n = \frac{2^n + 3^n}{4^n}$

(b) $v_n = \frac{n^{10}}{e^n}$

(c) $w_n = \frac{(-1)^n}{n}$

12. Sommes usuelles

Pour $q \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\sum_{k=0}^n q^k = \begin{cases} \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} & \text{si } q \neq 1 \\ n + 1 & \text{si } q = 1 \end{cases}$$

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}, \quad \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \quad \sum_{k=1}^n k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2.$$

13. Polynômes du second degré

Soit $P(X) = aX^2 + bX + c$ avec $a \neq 0$. On pose $\Delta = b^2 - 4ac$, le *discriminant* de P .

Racines.

- Si $\Delta > 0$, P admet deux racines réelles distinctes : $\alpha_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $\alpha_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$.
- Si $\Delta = 0$, P admet une racine réelle double : $\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{-b}{2a}$.
- Si $\Delta < 0$, P n'admet pas de racine réelle ; il est de signe constant (du signe de a).

Forme factorisée et relations coefficients-racines. S'il existe (au moins) une racine,

$$P(X) = a(X - \alpha_1)(X - \alpha_2), \quad \alpha_1 + \alpha_2 = -\frac{b}{a}, \quad \alpha_1 \times \alpha_2 = \frac{c}{a}.$$

On peut s'en servir pour trouver les racines : si l'on cherche deux nombres α_1, α_2 de somme s et de produit p , ce sont les racines du polynôme $X^2 - sX + p$.

Exemple. Les racines de $P(X) = X^2 - 7X + 6$ sont 1 et 6, car $1 + 6 = 7$ et $1 \times 6 = 6$.

14. Dénombrement

Factorielle. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $n! = 1 \times 2 \times \dots \times n$, avec la convention $0! = 1$.

Coefficient binomial « k parmi n ». Pour $n, k \in \mathbb{N}$ avec $0 \leq k \leq n$,

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

C'est le nombre de façons de choisir k éléments parmi n (sans ordre, sans répétition).

Propriétés.

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1, \quad \binom{n}{1} = n, \quad \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \text{ (symétrie).}$$

Formule du triangle de Pascal. Pour $0 \leq k \leq n$:

$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}.$$

Cette formule permet de calculer les coefficients binomiaux ligne par ligne :

$n = 0$					
$n = 1$					
$n = 2$					
$n = 3$					
$n = 4$					

Mini-exercice.

- (a) Calculer $\binom{8}{4}$, $\binom{7}{3}$, $\binom{12}{9}$.
- (b) Vérifier la formule de Pascal sur $\binom{5}{2} = \binom{4}{1} + \binom{4}{2}$.

15. Probabilités conditionnelles et indépendance

Dans toute cette section, (Ω, \mathcal{A}, P) désigne un espace probabilisé.

Probabilité conditionnelle. Soient A et B deux événements avec $P(B) > 0$. La probabilité de A sachant B est :

$$P(A | B) = P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

On en déduit la formule des probabilités composées :

$$P(A \cap B) = P(B) \times P(A | B) = P(A) \times P(B | A) \text{ (si } P(A) > 0\text{)}.$$

Indépendance. Deux événements A et B sont *indépendants* lorsque

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B).$$

Lorsque $P(B) > 0$, c'est équivalent à $P(A | B) = P(A)$: la réalisation de B ne donne aucune information sur celle de A .

Arbres de probabilités. Les probabilités conditionnelles se représentent naturellement par un arbre : sur chaque branche partant d'un nœud, on inscrit la probabilité (conditionnelle) de l'événement représenté. La probabilité d'un chemin est le produit des probabilités le long des branches.

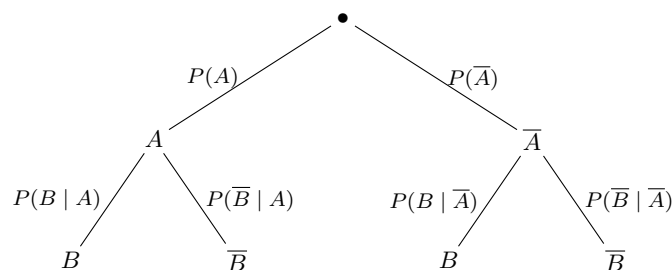


FIGURE 7 – Arbre de probabilités à deux niveaux.

Mini-exercice. Une urne contient 6 boules rouges et 4 boules noires. On tire deux boules sans remise. Calculer la probabilité que la deuxième boule soit rouge sachant que la première l'est, puis la probabilité que les deux boules soient rouges.

16. Variables aléatoires : lois de Bernoulli et binomiale

Variable aléatoire discrète finie. On note $X(\Omega)$ l'ensemble (fini) des valeurs prises par X . La loi de X est la donnée de $P(X = x)$ pour tout $x \in X(\Omega)$. On a $\sum_{x \in X(\Omega)} P(X = x) = 1$.

Espérance et variance.

$$E(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} x P(X = x), \quad V(X) = E((X - E(X))^2) = E(X^2) - E(X)^2.$$

L'écart-type est $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.

Loi de Bernoulli. Une variable X suit la loi de Bernoulli de paramètre $p \in [0, 1]$, notée $X \sim \mathcal{B}(p)$, si $X(\Omega) = \{0, 1\}$ et

$$P(X = 1) = p, \quad P(X = 0) = 1 - p.$$

Alors $E(X) = p$ et $V(X) = p(1 - p)$.

Loi binomiale. On répète n fois, de manière indépendante, une expérience de Bernoulli de paramètre p . Le nombre X de succès suit la loi binomiale de paramètres n et p , notée $X \sim \mathcal{B}(n, p)$. On a $X(\Omega) = \{0, 1, \dots, n\}$ et

$$\forall k \in \{0, 1, \dots, n\}, \quad P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}.$$

De plus, $E(X) = np$ et $V(X) = np(1 - p)$.

Mini-exercice. On lance 5 fois un dé équilibré à 6 faces. Soit X le nombre de fois où l'on obtient un 6.

- Quelle est la loi de X ?
- Calculer $P(X = 2)$ et $P(X \geq 1)$.
- Donner $E(X)$ et $V(X)$.

Deuxième partie – Exercices

Les exercices sont regroupés par thème. Dans chaque section, les premiers exercices sont d'entraînement quasi-mécanique : prenez le temps de réfléchir à vos réponses, ne répondez pas au hasard, et soyez sûrs de vous. Réessayez plusieurs jours plus tard, jusqu'à ce que cela devienne naturel. Les exercices marqués (*) sont plus exigeants.

17. Calculs algébriques

Entraînement

Exercice 1 – Fractions. Donner les résultats sous forme de fraction irréductible.

$$1) \left(\frac{7}{5} - \frac{1}{2} \right) - \left(\frac{7}{5} - 1 + \frac{2}{3} \right)$$

$$2) \frac{7}{3} \times \left(2 + \frac{1}{7} \right)$$

$$3) \frac{-\frac{3}{4}}{\frac{5}{8}}$$

$$4) \frac{\frac{3}{4} - \frac{5}{3}}{\frac{3}{4} + \frac{5}{3}}$$

$$5) \frac{1 + \frac{3}{5}}{4 - \frac{1}{2}}$$

$$6) \frac{\frac{2}{5} \times \frac{3}{4}}{\frac{2}{5} - \frac{3}{4}}$$

$$7) \frac{\frac{3}{16} - \frac{1}{8}}{\frac{5}{12} + \frac{7}{20}}$$

Exercice 2 – Fractions avec une inconnue.

$$1) \text{ Pour } x \neq -2, \text{ simplifier } 3 + \frac{5}{2+x}.$$

$$2) \text{ Pour } x \neq 2, \text{ simplifier } 5 + \frac{x+1}{x-2}.$$

$$3) \text{ Pour } x \neq 3/2 \text{ et } x \neq -5/4, \text{ simplifier } \frac{-2x+3}{2x-3} + \frac{3x+7}{4x+5}.$$

$$4) \text{ Pour } x \neq -1/2 \text{ et } x \neq 2/3, \text{ simplifier } \frac{x-2}{4x+2} - \frac{4x-1}{3x-2} + \frac{19x^2}{(4x+2)(3x-2)}.$$

Exercice 3 – Racines carrées.

$$1) 4\sqrt{24} - 5\sqrt{96} + 4\sqrt{54}.$$

$$2) \sqrt{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}} \cdot \sqrt{2 - \frac{\sqrt{2}}{2}}.$$

$$3) \frac{7}{2 - \sqrt{7}}.$$

$$4) \left(\sqrt{7 - 2\sqrt{6}} + \sqrt{7 + 2\sqrt{6}} \right)^2.$$

Exercice 4 – Puissances.

$$1) \frac{10^9 \times 6^3}{25^4 \times 3 \times 2^{11}}.$$

$$2) \frac{1}{10^{118}} - \frac{1}{10^{119}}.$$

$$3) 5^{108} \times 2^{106} \times 11 \times \frac{1}{10^{107}}.$$

Exercice 5 – Puissances avec une inconnue.

- 1) Pour $x > 0$: $\frac{(x\sqrt{x})^5}{(x^3 \times x)^2}$.
- 2) Pour $n \in \mathbb{N}$: $(-1)^{n-1} \times (-1)^n \times (-1)^{n+2}$.

Exercice 6 – Exponentielle et logarithme. Simplifier :

- 1) $\frac{e^5 \times e^{-2}}{e^4}$, $\frac{e^{-2} \times e^7}{e^3 \times e^{-4}}$.
- 2) Pour $x \in \mathbb{R}$: $\frac{e^{-2x} \times e^{4x}}{e^{5x} \times e^{-6x}}$, $\frac{e^{x-3} \times e^{4x}}{e^{1-3x}}$.
- 3) $\frac{\ln 16 + \ln 64}{10 \ln 2}$, $\ln\left(\frac{e^5 \times 12}{e^{-6} \times e^2}\right)$.

Exercice 7 – Coefficients binomiaux et factorielles.

- 1) Calculer $\binom{8}{4}$, $\binom{7}{3}$, $\binom{12}{9}$.
- 2) Pour $n \in \mathbb{N}$, simplifier $\frac{(n+1)! - n!}{n}$ et $\frac{(n+3)!}{(n+1)!}$.
- 3) Pour $n \in \mathbb{N}$, simplifier $\frac{n+2}{(n+1)!} - \frac{1}{n!}$.
- 4) Soient a, b réels non nuls, $n \in \mathbb{N}$ et $u_n = \frac{a^n}{n! b^{2n}}$. Calculer $\frac{u_{n+1}}{u_n}$.

Exercice 8 – Factorisation. Pour $x \in \mathbb{R}$, factoriser :

- 1) $(3x+5)(x-1) + (x-1)$ | $(5x-1)(2x+3) - 5x+1$ | $(7x-2)(x-9) + 14x-4$.
- 2) $(x+4)^2 + (x-4)(x+4) + 2x+8$ | $(2x+6)(x-5) + 3x+9$.
- 3) $x^2 - 4x + 4 + (x+3)(x-2)$ | $(3x-2)(x+5) + 9x^2 - 4$.
- 4) $\frac{25}{4}x^2 - \frac{169}{144}$ | $\frac{81}{16}x^2 - \frac{33}{2}x + \frac{121}{9}$.
- 5) $(3x-1)(4x+x^2) - 3(3x-1)$ | $x^2 - 9 + 3(x-3)$ | $x^3 + x^2 + x - 3$.

Exercice 9 – Simplifications d'exponentielles. Montrer que pour $x \in \mathbb{R}$,

- 1) $\frac{2e^{-x}}{1+e^{-x}} = \frac{2}{e^x+1}$.
- 2) $\frac{2}{1+e^x} = 2 - \frac{2}{1+e^{-x}}$.
- 3) $\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}}$.

Approfondissement**Exercice 10 * – Techniques de calcul.**

- 1) Pour $c > 0$, simplifier $C = \sqrt{\frac{c^{-4} (c^{3/2})^3}{c^6 (c^{-1})^2}}$.
- 2) Calculer E^2 où $E = \sqrt{9 + 4\sqrt{5}} + \sqrt{9 - 4\sqrt{5}}$.
- 3) On pose $x = \sqrt{7 + 4\sqrt{3}}$ et $y = \sqrt{7 - 4\sqrt{3}}$.
 - a) Montrer que y est bien défini.
 - b) Montrer que $x + y$ est un entier naturel.
- 4) On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = n^n e^{-n} \sqrt{n}$.
 - a) Simplifier $\frac{a_{2n}}{a_n^2}$.
 - b) Montrer que, pour tout entier $n \geq 2$, $\ln\left(\frac{a_n}{n a_{n-1}}\right) = -1 - \left(n - \frac{1}{2}\right) \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right)$.

5) Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\sqrt{1 + \frac{1}{k^2} + \frac{1}{(k+1)^2}} = 1 + \frac{1}{k(k+1)}$, puis calculer

$$B = \sum_{k=1}^{2020} \sqrt{1 + \frac{1}{k^2} + \frac{1}{(k+1)^2}}.$$

6) Soit $c > 0$. Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+cx^2}}$. Calculer $f(f(x))$ et $f(f(f(x)))$.

18. Inégalités et intervalles

Entraînement

Exercice 11 – Encadrement. Soient x et y deux réels tels que $-2 \leq x \leq 3$ et $-5 \leq y \leq 1$. Donner un encadrement des quantités suivantes :

$$x + 3, \quad y + 6, \quad (x + 3)(y + 6), \quad (x + 3) - (y + 6), \quad \frac{x + 3}{y + 6}, \quad 2 - x^2.$$

Exercice 12 – Intervalles et valeur absolue. Pour chacun des intervalles ci-dessous, déterminer $a \in \mathbb{R}$ et $r > 0$ tels qu'il s'écrive sous la forme $[a - r, a + r]$, puis l'écrire à l'aide de valeurs absolues.

$$I = [2, 4], \quad J = [4, 10], \quad K = [-2, 8], \quad L = [-12, -3].$$

Exercice 13 – Vrai ou faux. Pour chacune des assertions suivantes, dire si elle est vraie ou fausse. Si elle est vraie, le prouver. Si elle est fausse, donner un contre-exemple.

- 1) Deux réels sont systématiquement rangés dans le même ordre que leur double.
- 2) Lorsque x est un réel non nul, l'inégalité $x < \frac{1}{3}$ permet d'affirmer que $\frac{1}{x} < 3$.
- 3) Lorsque x est un réel non nul, l'inégalité $x < \frac{1}{3}$ permet d'affirmer que $\frac{1}{x} > 3$.
- 4) Deux réels sont systématiquement rangés dans le même ordre que leurs carrés.
- 5) Lorsque a, b, c, d sont quatre réels vérifiant $0 < a < b$ et $0 < c < d$, alors forcément $\frac{a}{c} < \frac{b}{d}$.
- 6) Lorsque a, b, c, d sont quatre réels vérifiant $0 < a < b$ et $0 < c < d$, alors forcément $\frac{a}{d} < \frac{b}{c}$.
- 7) Lorsque x et y sont deux réels vérifiant $|x + y| = |x| + |y|$, on a nécessairement $x \geq 0$ et $y \geq 0$.
- 8) Pour tous réels x, y , l'égalité $|x| = |y|$ est équivalente à l'égalité $x^2 = y^2$.

Approfondissement

Exercice 14 * – Inégalités classiques.

- 1) Montrer que, pour tous réels a et b , $ab \leq \frac{a^2 + b^2}{2}$.
- 2) Démontrer que, pour tout entier $n \geq 1$, $-\frac{1}{n} + \frac{1}{(n+1)^2} \leq -\frac{1}{n+1}$.
- 3) Soient $x \in [0, 1]$ et $a \in]0, 1[$. Vérifier que, pour tout $t \in [0, x]$, $\frac{x-t}{1-at} \leq 1$.
- 4) Montrer que, pour tout $u \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$, $1 \leq \frac{1}{\sqrt{1-u}} \leq 1 + u$.
- 5) Démontrer que, pour tout $x \geq 0$, $x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x$.
- 6) Sans calculatrice et sans valeurs approchées, déterminer le plus grand des deux nombres π^e et e^π . (On pourra étudier la fonction $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ sur \mathbb{R}_+^* .)

19. Équations et inéquations

Entraînement

Exercice 15 – Équations. Résoudre :

- 1) $3(x - 3) + 5 = 5 \left(\frac{x}{2} - \frac{4}{3} \right)$.
- 2) $\frac{6x - 1}{4x - 1} = \frac{3x + 1}{2x - 5}$.
- 3) $\sqrt{x^2 + 9} = 5$.

Exercice 16 – Inéquations. Résoudre :

- 1) $\frac{x + 3}{x - 1} < \frac{x - 4}{x + 2}$.
- 2) $\sqrt{4 - x} \leq x - 7$.

Approfondissement

Exercice 17 * – Équations diverses.

- 1) Soit P un polynôme. On dit qu'un nombre $\alpha \in \mathbb{R}$ est une *racine d'ordre au moins deux* de P lorsque $P(\alpha) = 0$ et $P'(\alpha) = 0$. Démontrer que le polynôme $P(X) = 2X^3 - 9X^2 + 12X + 1$ n'admet pas de racine d'ordre au moins deux.
- 2) Soit $m \in \mathbb{R}$. Résoudre, selon les valeurs de m , l'équation d'inconnue x :

$$(m^2 - 5m + 6)x^2 + (2m - 5)x + 1 = 0.$$

- 3) Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on note $[x]$ la partie entière de x (rappel : $[x] = k$ si et seulement si $k \leq x < k + 1$). Pour $n \in \mathbb{N}^*$ fixé et $k \in \mathbb{Z}$, résoudre l'équation d'inconnue $x \in \mathbb{N}$: $\left\lfloor \frac{x}{n} \right\rfloor = k$.
- 4) Résoudre $|x^2 - 5x + 6| = |x^2 - 4|$.
- 5) On pose, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $h(x) = e^x - e^{-x}$. Montrer que l'équation $\ln(h(x)) = 0$ possède une unique solution $x_0 \in \mathbb{R}$ et la déterminer.
- 6) Résoudre le système $(S) : \begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ x^2 y^2 = 6 \end{cases}$.

20. Études de fonctions, dérivées, limites

Entraînement

Exercice 18 – Composition de fonctions.

- 1) Pour tout réel x , on pose $f(x) = x^2$ et $g(x) = 2x - 1$. Calculer $g \circ f(x)$ et $f \circ g(x)$.
- 2) Pour tout réel x , on pose $f(x) = 1 - x^2$ et $g(x) = \sin x$. Calculer $g \circ f(x)$ et $f \circ g(x)$.

Exercice 19 – Ensembles de définition. Donner l'ensemble de définition des fonctions suivantes :

$$f(x) = x \ln x, \quad f(x) = \sqrt{\frac{9 - x^2}{e^x - 1}}.$$

Exercice 20 – Dérivées. Pour chacune des fonctions suivantes, donner l'ensemble de définition, l'ensemble de dérivation et la dérivée :

- 1) $f(x) = x \ln x$ | $f(x) = \ln(\ln x)$ | $f(x) = \ln(x^2 + 1)$
- 2) $f(x) = e^{x^2}$ | $f(x) = x^{\ln x}$ | $f(x) = (x^2 + x + 1)e^{-x}$

$$3) f(x) = (x+1)\ln(x+1) \quad | \quad f(x) = \frac{1}{x-e^x} \quad | \quad f(x) = \ln(1+e^x)$$

$$4) f(x) = e^{x^2-x} + 2 \quad | \quad f(x) = \sqrt{\frac{1}{3x-1}} \quad | \quad f(x) = xe^{1/x}$$

$$5) f(x) = \sqrt{x + \sqrt{1+x^2}}$$

Exercice 21 – Limites. Étudier les limites suivantes.

$$1) f(x) = 3x - 2 - 4 \ln x \text{ en } +\infty.$$

$$2) f(x) = \ln\left(\frac{2x+1}{x+1}\right) \text{ en } +\infty.$$

$$3) f(x) = \frac{\ln(1+x)}{x} \text{ en } 0.$$

$$4) f(x) = \frac{\ln(1+\sin x)}{x} \text{ en } 0.$$

$$5) f(x) = \frac{e^x}{\ln x} \text{ en } +\infty.$$

$$6) -4x + x^2 - 2 \ln(x^6) \text{ en } +\infty.$$

$$7) 2e^x - e^{x/2} + (\ln(e^{3x}))^4 \text{ en } +\infty, \text{ puis en } -\infty.$$

$$8) x \cos x + x^2 \text{ en } -\infty; x^2 \cos x + x \text{ en } +\infty.$$

$$9) \sqrt{x+1} - \sqrt{x-1} \text{ en } +\infty; \sqrt{x}(\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}) \text{ en } +\infty.$$

Exercice 22 – Dérivées trigonométriques.

$$1) f(x) = \cos(3x^2 + 2).$$

$$2) f(x) = 3 \tan x - \cos x \sin x.$$

$$3) f(x) = \sqrt{x} \sin x.$$

$$4) f(x) = \sqrt{x^2 - 10x + 21}.$$

Approfondissement

Exercice 23 * – Inégalités fonctionnelles.

$$1) \text{ Montrer que } \forall x \in \mathbb{R}_+, 1 + x + \frac{x^2}{2} \leq e^x.$$

$$2) \text{ Montrer que } \forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \frac{2}{\pi}x \leq \sin x \leq x.$$

Exercice 24 * – Étude d'une fonction. On considère la fonction f qui à tout réel x associe $f(x) = x \cos x - \sin x$.

a) Donner une expression simple de $f'(x)$.

b) Combien de solutions l'équation $f(x) = 0$ admet-elle dans $[0, \pi]$?

c) Combien de solutions l'équation $f(x) = -1$ admet-elle dans $[0, \pi]$?

d) Soit k un entier positif. Déterminer, en fonction de k , le nombre de solutions de l'équation $f(x) = -1$ dans $[k\pi, (k+1)\pi]$.

Exercice 25 * – Dérivées et limites en cascade.

1) Donner l'ensemble de définition et la dérivée de :

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}, \quad f(x) = \frac{1}{\ln x}, \quad g(x) = \frac{\sin x \cdot \cos x}{x}.$$

2) Donner l'ensemble de définition et la dérivée de :

$$h(x) = \ln \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}, \quad \psi(x) = (\ln(1+x^2))^n \text{ où } n \in \mathbb{N}.$$

3) Déterminer la dérivée seconde de $p(x) = e^{-x^2/2}$.

- 4) Soit f la fonction définie sur \mathbb{R}_+^* par $f(x) = \frac{1}{x+1} + \ln x - \ln(x+1)$. Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$. Déterminer aussi $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\ln x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) \right]$.

21. Intégration

Entraînement

Exercice 26 – Primitives classiques. Calculer les intégrales suivantes :

- 1) $\int_0^1 (x^3 + 2x^2 + x + 1) dx$ | $\int_0^1 (2x-2)(x^2-2x+1)^4 dx$.
- 2) $\int_0^1 \frac{2x+1}{x-4} dx$ | $\int_1^2 (x^e - e^x) dx$.
- 3) $\int_0^1 \frac{8x+4}{x^2+x+1} dx$ | $\int_0^1 x e^{-x^2} dx$.
- 4) $\int_0^{\ln 2} \frac{e^x}{e^x+2} dx$ | $\int_0^1 \frac{2x}{\sqrt{1+x^2}} dx$.

Approfondissement

Exercice 27 * – Encadrement et limite.

- 1) Soit $x > 0$. Montrer que $\forall t \in [0, x]$, $\frac{1}{1+x} \leq \frac{1}{1+t} \leq 1$. En déduire que pour tout $x > 0$, $\frac{x}{x+1} \leq \ln(1+x) \leq x$.
- 2) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [0, 1], 0 \leq x^n e^x \leq x^n e$. En déduire la limite de la suite $\left(\int_0^1 x^n e^x dx \right)_{n \in \mathbb{N}}$.

22. Suites et récurrences

Entraînement

Exercice 28 – Limites. Déterminer les limites éventuelles des suites suivantes :

$$a_n = \frac{2^n}{3^{n+1}}, \quad b_n = \frac{2^n + 3^n}{2^{n+1} + 3^{n+1}}, \quad c_n = \frac{n + (-1)^n}{n - (-1)^n}.$$

Exercice 29 – Suite arithmétique. Soit (u_n) la suite définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + r$.

- 1) Écrire u_n en fonction de u_0, r et n puis discuter de la convergence de (u_n) .
- 2) Démontrer que pour $n \in \mathbb{N}, 1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.
- 3) En déduire $u_0 + u_1 + \dots + u_n$.

Exercice 30 – Suite géométrique. Soit (u_n) la suite définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = q u_n$.

- 1) Écrire u_n en fonction de u_0, q et n puis discuter de la convergence de (u_n) .
- 2) Si $q \neq 1$, simplifier $(1-q)S_n$ où $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$.
- 3) En déduire une expression de S_n et discuter de la convergence de (S_n) .

Exercice 31 – Étude d'une suite. Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{5u_n}{2u_n + 1}$.

- 1) Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, 1 \leq u_n \leq 2$.
- 2) Montrer que (u_n) est croissante puis qu'elle converge; déterminer sa limite.
- 3) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = 1 - \frac{2}{u_n}$. Calculer v_0 et v_1 .

- 4) Montrer que (v_n) est géométrique.
- 5) Exprimer v_n puis u_n en fonction de n .
- 6) Calculer $\sum_{k=0}^n \frac{2}{u_k}$ en fonction de n .

Exercice 32 – Récurrence. Montrer par récurrence que pour $n \in \mathbb{N}$,

$$-1 + 2 - 3 + 4 - \dots + (-1)^n n = \frac{(-1)^n (2n + 1) - 1}{4}.$$

Approfondissement

Exercice 33 * – Récurrences classiques.

- 1) Savoir démontrer par récurrence les formules de la section « Sommes usuelles ».
- 2) Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \geq -1$: $(1+x)^n \geq 1+nx$ (inégalité de Bernoulli).
- 3) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{n^2} \leq 2 - \frac{1}{n}$.
- 4) On considère une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que, pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, $f(x) + f(x+1) = \frac{1}{x+1}$.
Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}^+$,

$$f(x) = (-1)^{n+1} f(n+1+x) + \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k+1+x}.$$

Exercice 34 * – Série harmonique. Soit (u_n) la suite définie par $u_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$.

- 1) Montrer que $u_{2n} - u_n \geq \frac{1}{2}$.
- 2) Si (u_n) converge, que dire de (u_{2n}) ? En déduire que (u_n) diverge vers $+\infty$.

23. Probabilités

Exercice 35. Dans cette question, A et B désignent deux événements d'un même univers.

- a) On suppose que A et B sont indépendants et que $P(A) = 0,4$ et $P(B) = 0,6$. Déterminer $P(A \cap B)$.
- b) On suppose que $P(A) = \frac{2}{5}$, $P(B) = 0,3$, et $P(A \cap B) = 0,15$. Les événements A et B sont-ils indépendants?
- c) On suppose que $P(A) = \frac{1}{5}$, $P(B) = \frac{2}{3}$, et que A et B sont indépendants. Déterminer $P(A \cup B)$ et $P_A(B)$.
- d) On suppose que A et B sont indépendants et ont la même probabilité, et que $P(A \cup B) = 0,64$. Déterminer $P(A)$.

Exercice 36 * – Tirages avec changement d'urne. On dispose de deux urnes, numérotées 1 et 2. L'urne 1 contient 6 boules blanches et 4 boules noires. L'urne 2 contient 8 boules blanches et 2 boules noires. Un joueur effectue une succession de tirages comme suit : il pioche une boule au hasard dans une urne, note sa couleur, et la remet dans l'urne. S'il a pioché une boule noire, il doit changer d'urne pour le tirage suivant. S'il a tiré une boule blanche, il effectue le tirage suivant dans la même urne.

On note p_n la probabilité que le joueur effectue le n -ième tirage dans l'urne 1. Pour le premier tirage, le joueur choisit l'urne au hasard, de manière équiprobable.

- a) Déterminer p_1 , puis p_2 .
- b) Déterminer $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $p_{n+1} = \alpha p_n + \beta$.
- c) Déterminer $x \in \mathbb{R}$ tel que la suite de terme général $p_n - x$ soit géométrique.
- d) En déduire la limite de la suite $(p_n)_{n \geq 1}$.

Annexe : alphabet grec

Minuscule	Majuscule	Nom	Minuscule	Majuscule	Nom
α	A	alpha	ν	N	nu
β	B	bêta	ξ	Ξ	ksi (ou xi)
γ	Γ	gamma	o	O	omicron
δ	Δ	delta	π	Π	pi
ε ou ϵ	E	epsilon	ρ	P	rhô
ζ	Z	dzêta (ou zêta)	σ	Σ	sigma
η	H	êta	τ	T	tau
θ	Θ	thêta	υ	Υ	upsilon
ι	I	iota	φ ou ϕ	Φ	phi
κ	K	kappa	χ	X	khi (ou chi)
λ	Λ	lambda	ψ	Ψ	psi
μ	M	mu	ω	Ω	oméga

Remarques.

- Les majuscules qui coïncident avec une lettre romaine (A, B, E, K, etc.) ne sont en général pas utilisées en mathématiques pour éviter toute ambiguïté.