

Cahier de vacances - semaine 7, correction

Lundi

1. $z = \frac{3+2i}{2-i} = \frac{8+i}{\sqrt{5}}$
2. $\int_0^1 (3x+1)^8 dx = \left[\frac{1}{27} (3x+1)^9 \right]_0^1 = \frac{4^9-1}{27}$
3. $\frac{\ln \frac{a}{b} + \ln \frac{a}{c}}{\ln \frac{a}{b}} = 1 + \frac{\ln \frac{a}{c}}{\ln \frac{a}{b}}$
4. $(\cos(2x) + i \sin(2x))^2 = \cos(4x) + i \sin(4x)$ (on passe par e^{2ix})
5. Vrai
6. Faux dans les deux cas (e^5 et $2^6 \neq 2^5$).

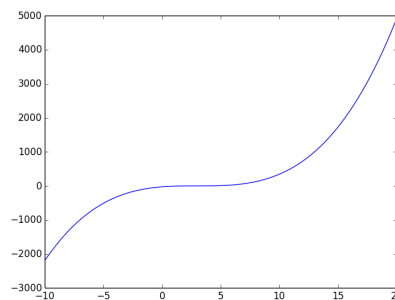
Mardi

1. Un argument de $(-417 - 417i)^{20}$ est π ($(-417 - 417i)^{20} = (417^{20}(1+i)^{20} = \dots (e^{i\frac{\pi}{4}})^{20}$)
2. On trace la courbe et l'aire sous la courbe est celle d'un trapèze, d'aire $\frac{(\text{petite base} + \text{grande base}) \times \text{hauteur}}{2}$. Ici les bases valent αa et αb et la hauteur $(b-a)$ soit :

$$\int_a^b \alpha x dx = \frac{\alpha(a+b)(b-a)}{2}$$

Par le calcul, on a $\int_a^b \alpha x dx = \left[\alpha \frac{x^2}{2} \right]_a^b = \alpha \frac{b^2 - a^2}{2}$, ce qui est le même résultat.

3. Il s'agit de la courbe de $x \mapsto x^3$ décalée de 3 unités vers la droite :



4. $\cos^2\left(\frac{\pi}{3}\right) + \sin^2\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$
5. On ne peut pas (la fonction racine n'est pas définie sur $\mathbb{R}_-$).
6. On utilise la relation $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$. L'équation demandée est $y = x + 1$.

Mercredi

- $\left(\frac{1}{i}\right)^{2017} = \frac{1}{i} = -i$
- $\int_0^1 \frac{1}{(2x+1)^2} dx = \left[\frac{-1}{2(2x+1)}\right]_0^1 = \frac{1}{3}$
- $x \mapsto e^x - \sin(x)$.
- On suppose que ni a , ni b , ni $a+b$ ne sont des multiples demi-entiers de $\frac{\pi}{2}$ pour que cette expression soit bien définie. On a (on multiplie par $\cos a \cos b$ à la 2ème ligne) :

$$\begin{aligned} \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b} &= \frac{\frac{\sin a}{\cos a} + \frac{\sin b}{\cos b}}{1 - \frac{\sin a \sin b}{\cos a \cos b}} \\ &= \frac{\sin a \cos b + \sin b \cos a}{\cos a \cos b - \sin a \sin b} \\ &= \frac{\sin(a+b)}{\cos(a+b)} \end{aligned}$$

soit bien $\tan(a+b)$.

- Vrai
 - $\left[\text{Si } x \in [0, 2] \text{ alors } 0 \leq x^2 \leq 4\right] \cdot \left[\text{Si } x \in [-1, 2] \text{ alors } 0 \leq x^2 \leq 4\right]$. ($x \mapsto x^2$ n'est pas uniforme sur l'intervalle donné).
-

Jeudi

- $i^a + i^{a+1} + i^{a+2} + i^{a+3} = 0$
 - On trouve $x \mapsto \frac{31}{33} \left(\frac{x}{31} + 32\right)^{33}$
 - $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(2x+3) = +\infty$. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \ln(2x+3)$ n'est pas définie.
 - Soit $x = \frac{a+b}{2}$ et $y = \frac{a-b}{2}$. On a $a = x+y$ et $b = x-y$. Or $\cos(x+y) + \cos(x-y) = 2 \cos x \cos y$, ce qui mène au résultat.
 - $412x + 14y = 204713$ n'a aucune solution dans $\mathbb{N}^2$. (La somme de deux entiers pairs ne peut être impaire).
 - $R\alpha$.
-

Vendredi

- $\frac{5+i}{1-2i} = \frac{7-9i}{\sqrt{5}}$.
- $\int_1^2 \left(\sqrt{x} - \frac{1}{x^2}\right) dx = \frac{2^{\frac{5}{2}}}{3} - \frac{7}{6}$
- $\frac{(x^2)^{\frac{1}{3}}}{(x^3)^{\frac{1}{2}}} = x^{-\frac{5}{6}}$

4. On a $\forall \alpha \in [0, \frac{\pi}{2}[$, $\cos \alpha = \frac{c}{b}$. Or $c > b$ (il s'agit de l'hypothénuse), ce qui mène au résultat demandé.
 5. Non. ($\forall x$, $\cos x - 1 \leq 0$ et $e^{-x} > 0$).
 6. Non dans les deux cas. ($e^3 e^{\frac{1}{3}} = e^{\frac{10}{3}}$ et $(2^3)^{\frac{1}{3}} = 1$).
-

Samedi

1. $z + ze^{i\pi} = 0$.
2. $\int_{231}^{237} \alpha dx = 6\alpha$ (aire d'un rectangle). On a aussi $\int_{231}^{237} \alpha dx = [\alpha x]_{231}^{237}$, ce qui donne la même chose.
3. $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{2017} e^{-x} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} x(\ln(x))^{52} = 0$ (rappel : $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^\alpha (\ln(x)) = 0 \forall \alpha > 0$, le résultat s'obtient alors en écrivant $x(\ln(x))^{52} = \left(x^{\frac{1}{52}} \ln(x)\right)^{52}$)
4. $\cos^2(12x) + \sin^2(12x) = 1$ et $\cos^2(12x) + \cos^2(12x + \frac{\pi}{2}) = 1$
5. Faux. (Même si $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0$, la fonction n'est jamais nulle).
6. $(2^2)^2 \times 2 = 2^5 = 32$