Cahier de vacances - correction, semaine 6

Lundi

1. Un argument de $\frac{1}{2022-2022i}$ est $\boxed{\frac{\pi}{4}}$
2. $\boxed{\int_{-3}^{7} a dx = 10a}$
3. $\boxed{\mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{e^x}{1+e^x}}$
4. On a $\frac{1+\cos\theta}{2} = \cos^2(\frac{\theta}{2})$ (formule connue) donc $(1+\cos(\theta) \geq 0)$: $\boxed{\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}} = \left|\cos(\frac{\theta}{2})\right|}$.
5. $\boxed{\pi a^2}$
6. On doit trouver $\alpha_1 + \alpha_2$ tels que $\alpha_1 = \arccos 1 + \frac{R_T}{R_T + h_{phare}}$ et $\alpha_2 = \arccos \frac{h_{personne}}{R_T + h_{personne}}$, soit $\alpha_1 = 4,69.10^{-3}$rd et $\alpha_2 = 1,77.10^{-3}$rd, ce qui fait une distance de $d = R_T(\alpha_1 + \alpha_2) = 41,1$km

---

Mardi

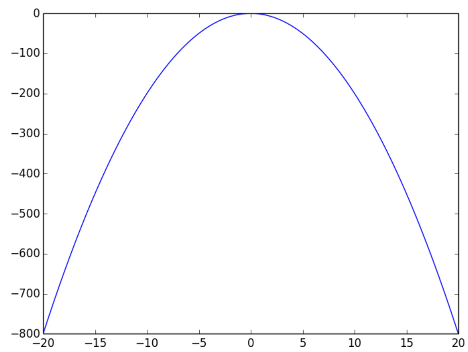
1. On pose $x = ib$ (on a $b \neq 0$) donc $z = 5 - b + 5i$ donc $|z| = \sqrt{(5-b)^2 + 25}$ donc $\boxed{|z| = \sqrt{(5 - \mathrm{Im}(z))^2 + 25}}$.
2. $\boxed{\mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \cos(a)x}$.
3. $\boxed{f(x) = -\ln(x)}$
4. $\dfrac{2\tan(a)}{1-\tan^2(a)} = \dfrac{2\frac{\sin(a)}{\cos(a)}}{\frac{\cos^2(a)-\sin^2(a)}{\cos^2(a)}} = 2\dfrac{\sin(a)\cos(a)}{\cos(2a)} = \dfrac{\sin(2a)}{\cos(2a)} = \tan(2a)$
5. On trouve $\cos^2(2x) - \sin^2(2x) + 2i\cos(2x)\sin(2x) = \cos(4x) + i\sin(4x) = e^{i4x}$ (qu'on aurait pu trouver directement en écrivant $\cos(2x) + i\sin(2x) = e^{i2x}$
6. elle $\frac{T}{2}$ périodique, donc a fortiori T périodique et $2T$ périodique.

Mercredi

1. $\boxed{\text{Non}}$ $(|z| = 2022|1+i| = 2022\sqrt{2})$
2. $\boxed{\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{2x+5}dx = \frac{1}{2}[\ln(2x+5)]_0^1 = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{7}{5}\right)}$
3. $\mathbb{R}^{+*} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{1}{x\ln(x)}$
4. $\boxed{365}$ est une période de $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \sin\left(\frac{2\pi x + 730}{365}\right)$ (vérifier que $f(x+365) = f(x)$)
5. On voit que $\cos(\alpha) = \frac{b}{c}$. Comme l'hypothénuse est toujours le plus grand des côtés...
6. On a $\forall x \in \mathbb{R}$, $\cos(x) - 1 \leq 0$ et $e^{-x} > 0$, donc ces deux grandeurs ne peuvent être égales. On n'a pas de solutions.

Jeudi

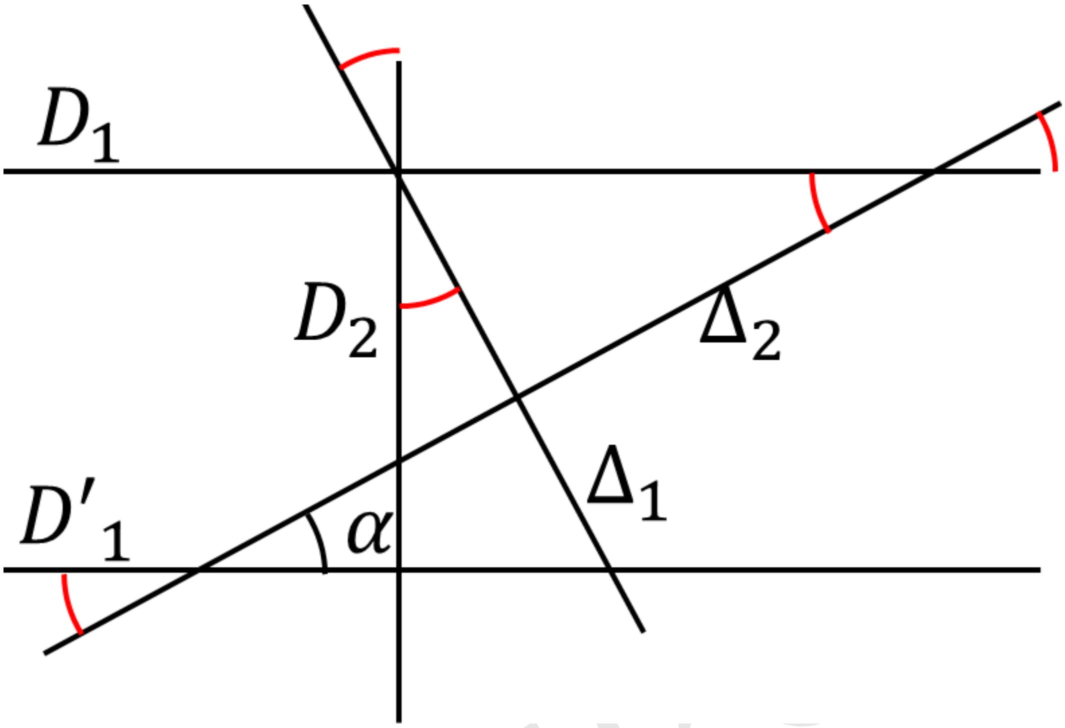
1. $\boxed{e^{i\pi} = -1}$
2. $\int_3^7 (5x+4)dx = 4 \times \frac{1}{2} \times (19+39) = \boxed{116}$ (aire du trapèze délimité par l'axe des abscisses et les droites d'équations : $x = 3$, $x = 7$, $y = 5x+4$)
3. Il s'agit d'une parabole, mais retournée et "dilatée" d'un facteur 2 :



4. $(x+3)^2 = 25 \Leftrightarrow (x+3)^2 - 25 = 0 \Leftrightarrow (x+8)(x-2) = 0 \Leftrightarrow x = -8$ ou $x = 2$.
5. $\boxed{\pi}$
6. $\boxed{\pi R^2 h}$

Vendredi

1. Soit $z = 3 + 17i$. On a : $ze^{i\frac{\pi}{2}} = 3i - 17$ donc $\boxed{Re(ze^{i\frac{\pi}{2}}) = 3 \text{ et } Im(ze^{i\frac{\pi}{2}}) = -17 \text{ (ceci correspond à un quart de tour dans le plan complexe)}}$
2. $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x}}dx = \int_1^2 x^{-\frac{1}{2}}dx = [2x^{\frac{1}{2}}]_1^2 = \boxed{2(\sqrt{2}-1)}$
3. Pour $x \in \mathbb{R}$: $f(x) = \dfrac{e^{3x}}{(e^{-x})^2} = \boxed{e^{5x}}$



4. $\boxed{\sin^2(\frac{\pi}{6}) + \cos^2(\frac{5\pi}{6}) = 1}$ (car $= \sin^2(\frac{\pi}{6}) + \cos^2(\pi - \frac{\pi}{6}) = \sin^2(\frac{\pi}{6}) + (-\cos(\frac{\pi}{6}))^2$)
5. Tous les angles dessinés sur la figure sont égaux à α en valeur absolue :
6. On écrit $\tan(a+b) = \frac{\sin(a+b)}{\cos(a+b)} = \frac{\cos(a)\sin(b)+\sin(a)\cos(b)}{\cos(a)\cos(b)-\sin(a)\sin(b)}$. On divise par $\cos(a)\cos(b)$ et on trouve $\frac{\tan(b)+\tan(a)}{1-\tan(a)\tan(b)}$, qui est bien le résultat demandé.

Samedi

1. Un argument de $z = \frac{5}{2} + 5\frac{\sqrt{3}}{2}i = \frac{5}{2}(1+\sqrt{3}i) = 5(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}) = 5e^{i\frac{\pi}{3}}$ est $\frac{\pi}{3}$ donc un argument de z^{-3} est $-\pi$ ou $\boxed{\pi}$
2. $\boxed{\mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R},\ y \mapsto \frac{47}{48} y^{\frac{48}{47}}}$
3. $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \boxed{\frac{\sqrt{2}}{4}(1+\sqrt{3})}$
4. (a) on écrit $m_1\overrightarrow{GM_1} + m_2\overrightarrow{GM_2} = \overrightarrow{0}$ et on insère M_1 : $\overrightarrow{M_1G} = \frac{m_2\overrightarrow{M_1M_2}}{m_1+m_2}$. On voit donc que G est sur la droite (M_1M_2) (vecteurs colinéaires). De plus $\overrightarrow{M_1G}$ et $\overrightarrow{M_1M_2}$ sont de même sens donc G est sur la demi droite $[M_1M_2)$. Enfin $\frac{m_2}{m_1+m_2} < 1$ donc G est avant M_2, donc sur le segment $[M_1M_2]$
   (b) on constate que si $m_1 > m_2$, alors $\frac{m_2}{m_1+m_2} < \frac{1}{2}$ donc G est plus proche de M_1, point le plus lourd.
   (c) si $m_1 = m_2$ alors $\overrightarrow{M_1G} = \frac{\overrightarrow{M_1M_2}}{2}$ donc G est le milieu de $[M_1M_2]$
   (d) On écrit $\overrightarrow{G_0A} + \overrightarrow{G_0B} + \overrightarrow{G_0C} = \overrightarrow{0}$ ainsi que $\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} = \overrightarrow{0}$. On insère I, ce qui donne : $\overrightarrow{G_0A} + 2\overrightarrow{G_0I} = \overrightarrow{0}$, puis on insère A dans $\overrightarrow{G_0I}$, ce qui mène bien à $\overrightarrow{AG_0} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AI}$
5. On a $\sum_{i=1}^n m_i\overrightarrow{GM_i} = \sum_{i=1}^n m_i\overrightarrow{GO} + \sum_{i=1}^n m_i\overrightarrow{OM_i} = \left(\sum_{i=1}^n m_i\right)\overrightarrow{GO} + \sum_{i=1}^n m_i\overrightarrow{OM_i}$, ce qui mène bien à la relation indiquée.
6. Correction à venir...