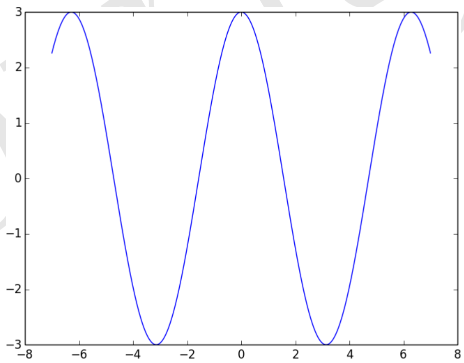
Cahier de vacances - correction, semaine 5

Lundi

1. $\boxed{\left|\frac{a}{b}\right| = \left|\frac{a}{ib}\right| = \left|\frac{ia}{b}\right| = \frac{a}{b}}$ et un argument de $\frac{a}{b}$ est $\boxed{0}$, un argument de $\frac{a}{ib} = \frac{a}{b}e^{-i\frac{\pi}{2}}$ est $\boxed{-\frac{\pi}{2}}$, un argument de $\frac{ia}{b} = \frac{a}{b}e^{i\frac{\pi}{2}}$ est $\boxed{\frac{\pi}{2}}$
2. $\boxed{\int_0^\pi \sin(f)df = [-\cos(f)]_0^\pi = 2}$
3. Il s'agit de la courbe de cosinus, mais "étirée" d'un facteur 3 de part et d'autre de l'axe des abscisses :



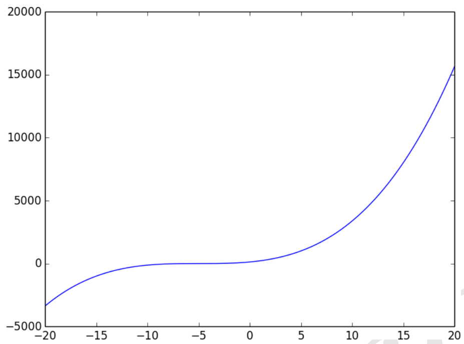
4. $\cos(\frac{\pi}{6}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin(\frac{3\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$
5. $\boxed{4\pi x^2}$
6. Le point parcourt un cercle de rayon $r = R_T = \cos\lambda$ soit $v = \frac{2\pi R_T \cos\lambda}{T} = 1119\text{km/h}$

Mardi

1. $\boxed{|z| = \sqrt{2Re(z)^2} = -\sqrt{2}Re(z)}$
2. $\boxed{\int_0^a \cos\left(\frac{2\pi t}{a}\right) dt = [\frac{a}{2\pi}\sin\left(\frac{2\pi t}{a}\right)]_0^a = 0}$ (intégrale sur une période)
3. $\boxed{\mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto -2\cos(2x+5)}$
4. $\boxed{x = -\frac{\pi}{6}}$
5. $\boxed{R\frac{\pi}{4}}$
6. la vitesse angulaire vaut simplement $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{\sqrt{k}r^{\frac{3}{2}}}$ donc ω diminue quant r augmente. Par contre, $v = \frac{2\pi R}{T} = \frac{piR}{\sqrt{k}R^{1/2}}$: la vitesse décroît plus lentement.

Mercredi

1. $\boxed{e^{i32\pi} + e^{i35\pi} = 1 + (-i) = 1 - i}$
2. $\boxed{\int_0^1 (x+1)^8 dx = [\frac{1}{9}(x+1)^9]_0^1 = \frac{1}{9}(2^9 - 1)}$
3. Il s'agit de la courbe de $x \mapsto x^3$, mais décalée vers la gauche de cinq unités :



4. $\boxed{\cos(n\pi + x) = (-1)^n \cos x}$ (=$\cos(n\pi)\cos(x) - \sin(n\pi)\sin(x)$ sachant que $\sin(n\pi) = 0$ et $\cos(n\pi) = (-1)^n$)
5. Il suffit d'écrire : $\frac{x}{2+x} = \frac{1}{1+\frac{2}{x}}$. $x \mapsto \frac{2}{x} + 1$ est décroissante et positive sur $\mathbb{R}^+$, donc $x \mapsto \frac{x}{2+x}$ est croissante
6. On a simplement $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{e_y} = u_y$.

Jeudi

1. $\boxed{(3+2i)(4-i) = 14 + 5i}$
2. $\boxed{\int_0^{2\pi} \cos(x)\, d\theta = 2\pi \cos(x)}$
3. $\boxed{\frac{e^a + e^b}{e^{ab}} = \frac{e^a}{(e^a)^b} + \frac{e^b}{(e^b)^a} = e^{a(1-b)} + e^{b(1-a)}}$
4. la période est $\boxed{2022}$
5. Il suffit de remarquer que $a = \frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2}$ et que $b = \frac{a+b}{2} - \frac{a-b}{2}$, et d'appliquer $\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$
6. Il n'y a aucune solution : si x et y sont entiers, alors $412x + 14y$ est pair.

Vendredi

1. On peut écrire $417 + 417i = 417\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ donc un argument de $(-417 - 417i)^{20} = (417 + 417i)^{20} = 2^{10}417^{20}e^{5\pi}$ est π
2. $\boxed{\int_0^1 x\sqrt{x}dx = \int_0^1 x^{\frac{3}{2}} = [\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}] = \frac{2}{5}}$
3. $\boxed{\mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto -5x^2 \sin(5x+1) + 2x\cos(5x+1)}$
4. $\boxed{x = \frac{\pi}{3} \text{ ou } x = -\frac{\pi}{3}}$
5. On a immédiatement $y = 2x + 1$, puisqu'on donne l'ordonnée à l'origine.

6. Puisqu'un cercle complet a une longueur de $2\pi R$, un arc de cercle d'angle α a pour longueur $\frac{\alpha}{2\pi}2\pi R = \alpha R$ (c'est même la définition du radian : 1 radian est l'angle correspondant à un arc de longueur 1 pour un cercle de rayon 1).

Samedi

1. $\boxed{|z| = \sqrt{(2-x)^2+16}}$
2. $\boxed{\int_0^1 \frac{1}{x+1}dx = [\ln(x+1)]_0^1 = \ln(2)}$
3. $\boxed{\mathbb{R}^{+*} \to \mathbb{R},\ x \mapsto 1+\ln(x)}$
4. $\boxed{\cos(\frac{4\pi}{3}) = -\frac{1}{2}}$ et $\boxed{\sin(\frac{5\pi}{6}) = \frac{1}{2}}$.
5. $\boxed{R^2\frac{\pi}{6}}$
6. l'angle entre $\overrightarrow{e}$ et $\overrightarrow{AB}$ vaut $\pi - \theta$ donc $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{e} = a\cos(\pi-\theta) = -a\cos\theta$.