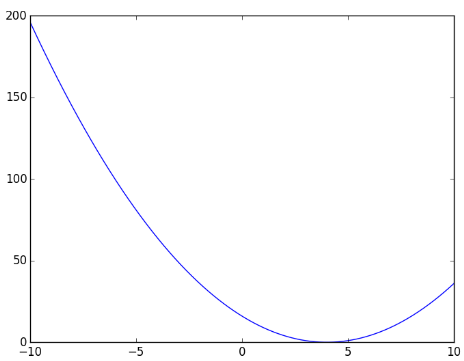
Cahier de vacances - semaine 3, correction

Lundi

1. Le module vaut 2 et un argument vaut $-\pi$
2. On trouve par exemple $x \mapsto -\frac{1}{6}\frac{1}{x^6}$
3. On trouve $x \mapsto 3e^{3x+7}$
4. Respectivement, on a 0,1,1,0,0 et -1
5. Toujours la même relation $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$:
   - pour sinus, en 0, on a $y = x$
   - pour cosinus, en 0, on a $y = 1$ (tangente horizontale).
6. Si on appelle R le rayon de la sphère, le cube a un côté de $2R$, donc un volume de $8R^3$. Le volume de la sphère est $\frac{4}{3}\pi R^3$ donc le pourcentage d'occupation est $\frac{\pi}{6} = 52\%$

Mardi

1. $\boxed{\text{Son module vaut 1}}$ (rapport de deux conjugués).
2. On trouve $\boxed{a \mapsto \frac{-1}{9(3a-4)^3}}$
3. Il s'agit du "décalage" vers la droite de quatre unités de la courbe représentative de $x \mapsto x^2$:



4. $\boxed{\cos x = \frac{1}{218} \text{ a une solution}}$ car $\frac{1}{218} < \frac{\sqrt{2}}{2}$ (cf cercle trigonométrique). Pour $\cos x = 218$, aucune.
5. Il faut exprimer $v = \frac{2\pi(R_T+z)}{T}$, où T est la période. On a alors $4\pi^2(R_T + z)^3 = g_0 R_T^2 T^2$ soit $z = \left(\frac{g_0 R_T^2 T^2}{4\pi^2}\right)^{1/3} - R_T = 328\text{km}$
6. Le plus grand nombre à 8 chiffres en base 10 vaut $10^8 - 1$, et en base 2 $2^8 - 1 = 255$ (ou 11111111_2

Mercredi

1. La bonne réponse est la $\boxed{\text{(c)}}$
2. On trouve $\boxed{x \mapsto \frac{2}{3}(x+4)^{\frac{3}{2}}}$
3. On tend vers zéro par valeurs supérieures vu l'ensemble de définition. On trouve donc $\boxed{+\infty}$ comme limite.
4. $\boxed{\cos\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}}$
5. La seule solution est $\boxed{x = \frac{7}{5}; y = \frac{1}{5}}$.
6. Sa période vaut $T = \frac{2\pi}{\omega}$ puisque $\cos(\omega(t + \frac{2\pi}{\omega}) = \cos(\omega t + 2\pi)$

Jeudi

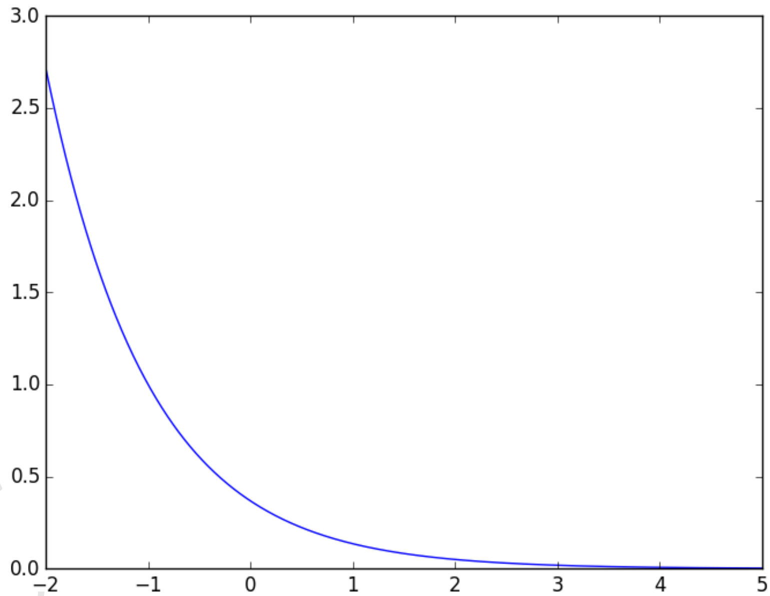
1. $\boxed{1}$
2. On trouve $\boxed{x \mapsto \frac{4^x}{\ln(4)}}$ (on écrit que $4^x = e^{x\ln(4)}$ et on intègre).
3. la limite vaut 0
4. On trouve $\boxed{a\sin(\theta)}$
5. On a $\cos^2(12x) + \sin^2(12x) = 1$, et comme $\cos^2(12x + \frac{\pi}{2}) = \sin^2(12x)$, on trouve encore 1.
6. C'est un exercice de conversion :

$$25\frac{\text{atome}}{\text{cm}^3} \times \frac{1\text{g}}{\text{mol} \times 6,02.10^{23}\text{atomemol}^{-1}} \times \left(\frac{100\text{cm}}{1\text{m}} \times \frac{3.10^8\text{m}}{1\text{s}} \times \frac{86400\text{s}}{1\text{jour}}\frac{365,25\text{jour}}{1\text{an}}\right)^3 = 3,52.10^{31}\text{g} = 3$$

(soit 1/1000e de la masse du soleil, par exemple, ou 10.000 fois celle de la Terre).

Vendredi

1. $\boxed{e^{i\pi} + e^{-i\pi} = -2}$
2. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2(x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{2}(1-\cos(2x))dx = \frac{1}{2}(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2})$: on trouve $\boxed{\frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}}$
3. Il s'agit de la courbe représentative de $x \mapsto e^x$, "symétrisée" par rapport à l'axe des ordonnées, puis décalée d'une unité vers la gauche :



4. On a une solution si $a \geq 0$, aucune sinon.
5. f croissante signifie que si on choisit x et y dans son ensemble de définition tels que $x > y$, alors $f(x) \geq f(y)$. Si f_1 et f_2 sont croissantes alors $f_1(x) \geq f_1(y)$, alors $f_2(x) \geq f_2(y)$ donc $f_1(x) + f_2(x) \geq f_1(y) + f_2(y)$, ce qui mène à $(f_1 + f_2)(x) \geq (f_1 + f_2)(y)$; comme x et y ont été choisis quelconques sur l'ensemble de définition de f_1 et de f_2, on a démontré ce que l'on voulait. Par contre, la somme de deux fonctions monotones n'est pas monotone, par exemple $x \mapsto \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}_+^*$
6. On appelle β l'angle de sommet B et γ celui de sommet C ; on désigne par O le centre du cercle et par β' l'angle BOA et γ' l'angle COA. On note α l'angle BAC, α_1 l'angle BAO et α_2 l'angle OAC. On a :

$$\begin{array}{rcl} \alpha & = & \alpha_1 + \alpha_2 \\ & = & \pi - (\beta + \beta') + \pi - (\gamma + \gamma') \\ & = & 2\pi - \underbrace{(\beta' + \gamma')}_{=\pi} - (\beta + \gamma) \\ & = & \pi - \alpha \end{array}$$

   et donc $\alpha = \frac{\pi}{2}$, ce qui prouve que le triangle est rectangle en A

Samedi

1. $\boxed{67i = 67e^{i\frac{\pi}{2}}}$.
2. On trouve $\boxed{\frac{4^7}{8}t^8}$.

3. $\boxed{\lim_{x\to-\infty} x^a = 0}$.
4. $\boxed{\cos(4\pi + x) = \cos(x)}$.
5. Ceci ressemble au théorème de Thalès, mais ça ne l'est pas. On trouve en utilisant deux fois ce théorème que néanmoins $d = D\frac{b}{a}$
6. On trouve $h = \frac{\text{volume}}{\text{surface}} = \frac{10^{24}1\text{cm}^3}{10000\text{m}^2} \times \left(\frac{1\text{m}}{100\text{cm}}\right)^3 = 10^{14}\text{m}$, donc un peu plus que la distance Terre-soleil.