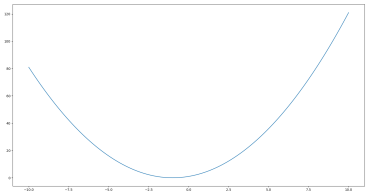
Cahier de vacances - correction, semaine 2

Lundi

1. On a $\boxed{|2022+2022i| = 2022\sqrt{2} \text{ et un argument de ce nombre vaut } \frac{\pi}{4}.}$
2. On trouve $\boxed{\theta \mapsto \ln(3-\theta) \text{ (Attention : } \theta - 3 < 0)}$
3. Il s'agit du "décalage" d'une unité vers la gauche de la courbe représentative de $x \mapsto x^2$. On a donc :



4. On a $\boxed{\sin(2x)(2\cos^2(x)-1) = \frac{1}{2}\sin(4x)}$.
5. Il s'agit de la longueur d'un cercle de rayon r. Si on calcule l'intégrale proposée, on trouve πr^2, qui serait l'aire du disque de même rayon.
6. On a $M_S = \frac{4\pi^2 a^3}{GT^2} = \frac{4\pi^2.(149{,}6.10^6\text{km})^3}{6{,}674.10^{-11}\text{kg}^{-1}.\text{m}^3.\text{s}^{-2}(1\text{an})^2} \cdot \frac{10^9\text{m}^3}{1\text{km}^3} \cdot \frac{(1an)^2}{(365{,}35\text{j})^2} \cdot \frac{(1j)^2}{(86400s)^2} = 1,98.10^{30}\text{kg}$

Mardi

1. On a $\boxed{z = \sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4})}$
2. On trouve $\boxed{\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{2x}dx = \frac{\ln 2}{2}}$
3. On trouve la fonction $\boxed{x \mapsto \frac{1}{\sqrt{2x+1}}}$
4. On a $\boxed{\cos(2a) = \cos^2(a) - \sin^2(a)}$
5. Dans l'ordre : pico, nano, micro,milli, kilo, méga, giga,tera.
6. Il s'agit du théorème de Thalès : $d = D\frac{b}{a}$

Mercredi

1. Un argument de x est $\boxed{0 \text{ si il est positif, } \pi \text{ si il est négatif}}$.
2. On trouve $\boxed{\int_0^{2\pi} \cos(\theta) d\theta = 0}$
3. $\boxed{\text{La limite de } g \text{ quand } t \text{ tend vers 0 vaut 0}}$.
4. On a $\boxed{\sin(x + 2022\pi) = \sin(x)}$.
5. On trouve $V = \frac{hd^2\pi^2}{12}$
6. On a $a = \left(\frac{4*57\text{g.mol}^{-1}}{6{,}02.10^{23}\text{mol}^{-1}.4700\text{kg.m}^{-3}} . \frac{1\text{kg}}{1000\text{g}}\right)^{\frac{1}{3}} = 431\text{pm}$

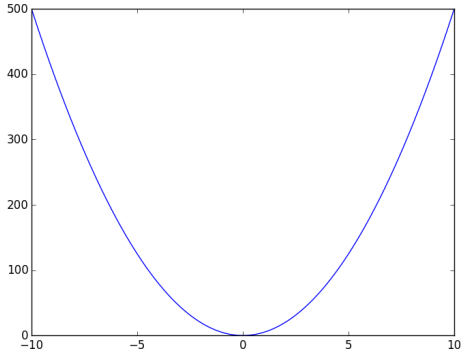
Jeudi

1. On trouve $\boxed{\left|\frac{1+i}{1-i}\right| = 1}$ (rapport de deux conjugués). $\boxed{\text{Un argument de } \frac{1+i}{1-i} \text{ est } \frac{\pi}{2}}$, car un argument du numérateur est $\frac{\pi}{4}$ et un du dénominateur est $-\frac{\pi}{4}$.
2. On trouve $\boxed{x \mapsto \frac{1}{3}x^3}$.
3. Les solutions correspondent aux intersections entre la droite d'équation $y = \frac{x}{k}$ et la courbe représentative de $x \mapsto \sin(x)$. Ces deux courbes se coupent en $(0;0)$, et se recoupent en dehors de ce point si et seulement si $k > 1$. On trouve donc $\boxed{\text{1 solution si } k \leq 1 \text{ et 3 solutions si } k > 1.}$
4. On a $\boxed{\frac{1}{\tan\alpha} = \frac{c}{a}}$.
5. L'énergie cinétique s'écrit $\frac{1}{2}mv^2$, donc l'unité standard est le $\text{kgm}^2\text{s}^{-2}$. Le travail d'une force est aussi une énergie et vaut $F.d$, ce qui donne en unité standard N.m
6. Sa période est de π, puisque $\forall x \in \mathbb{R}$, $\cos(2(x + \pi)) = \cos(2x)$

Vendredi

1. On trouve $\boxed{z = \frac{7+11i}{\sqrt{5}}}$
2. $\boxed{\int_0^1 e^{2x} dx = \frac{e^2 - 1}{2}}$
3. $\boxed{f(x) = \ln(\sqrt{x}) - \ln(\frac{1}{x^2}) = \frac{5}{2}\ln(x)}$
4. On trouve $\boxed{\cos(x + 17\pi) = -\cos(x)}$ et $\boxed{\sin(x + 17\pi) = -\sin(x)}$, car 17 est impair.
5. Chaque case correspond à deux états possibles, donc on a $2^8 = 256$ possibilités différentes.
6. On utilise la relation $y = f'(a)(x - a) + f(a)$, avec $a = 0$ et $f : x \mapsto e^x$, donc $y = x + 1$.

Corrigé



Samedi

1. Un argument est $\frac{\pi}{2}$ si la partie imaginaire est positive, $\frac{-\pi}{2}$ sinon.
2. On trouve $x \mapsto \frac{-1}{2021x^{2021}}$
3. Une multiplication correspond à une "dilatation" de sa courbe représentative autour de 0 :
4. On a deux solutions, puisque cos est bijective de $[-\frac{\pi}{2}, 0]$ vers [0,1] et de $[0, \frac{\pi}{2}]$ vers [0,1].
5. On a simplement $R\frac{\pi}{6}$, si R est le rayon du cercle
6. On va dériver : $f'(x) = 1 - \frac{1}{x}$, ce qui montre que $f'(x) \leq 0$ sur $]0, 1]$ et positive sur $[1, +\infty[$. f est donc décroissante puis croissante, donc $f(1)$ est un minimum de f. Or $f(1) = 0$ donc 0 est un minimum de f sur $\mathbb{R}_+^*$: f est positive sur $\mathbb{R}_+^*$.

Corrigé