Cahier de vacances - correction, semaine 1

Lundi

1. On trouve $i^3 = -i$ donc $\boxed{|i^3| = 1}$ et $\boxed{\text{un argument de } i^3 \text{ est } -\frac{\pi}{2}}$.
2. Une primitive est $\boxed{x \mapsto -\frac{1}{x}}$
3. On trouve $\boxed{\frac{2}{3}}$ dans les deux cas.
4. Il s'agit d'une formule de base $\boxed{\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a}$
5. On trouve une vitesse $v = 18,8\text{cm/min}$, soit $\boxed{v = 3,14\text{m/s}}$, une fréquence $\boxed{f = 1,66.10^{-2}\text{Hz}}$ et une pulsation de $\boxed{\omega = 1,05.10^{-1}\text{rd/s}}$.
6. c'est une formule de collège, $\boxed{V = \frac{4\pi}{3} b^3}$

Mardi

1. On trouve $\boxed{i+1}$
2. Une primitive est $\boxed{x \mapsto -\frac{1}{2}\cos(2x)}$
3. On trouve $\boxed{x \mapsto -2\sin(x)\cos(x)}$
4. On part de $\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$ avec $a = b = \frac{x}{2}$, ce qui mène à $\cos(x) = \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}$. En écrivant alors que $\sin^2\frac{x}{2} = 1 - \cos^2\frac{x}{2}$, on trouve le résultat demandé.
5. Il faut que l'avant ait parcouru une distance de $l + d$, ce qui donne un temps $\boxed{t = \frac{l+d}{v}}$
6. Il s'agit d'une conversion $1u.a./an = 1\frac{u.a}{an} \times \frac{1an}{365{,}25jour} \times \frac{1jour}{24h} \times \frac{149{,}610^6 km}{1u.a.}$, ce qui mène à $\boxed{1u.a./an = \frac{149{,}6.10^6}{365{,}25*24} = 17066\text{km/h}}$

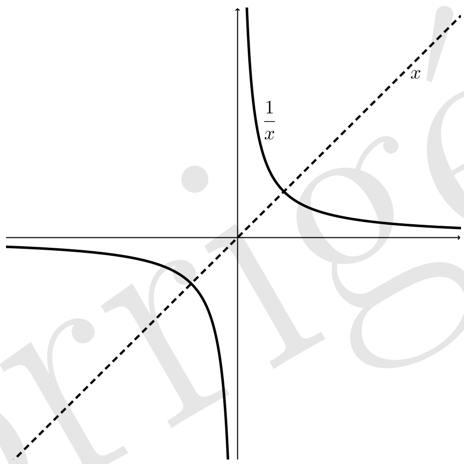
Mercredi

1. En développant on trouve $\boxed{2i}$. On peut aussi écrire $1 + i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$, dont le carré mène aussi à $2i$.
2. On a $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{2} + \frac{\cos(2x)}{2}\right) dx$. Ceci mène à : $\boxed{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(x)dx = \frac{\pi}{4}}$
3. Il s'agit d'une composition. On trouve $\boxed{f' : t \mapsto 2x'(t)x(t)}$, où x' est la dérivée de x.
4. On a $\boxed{\sin(2a) = 2\cos(a)\sin(a)}$
5. On trouve $\boxed{M_H : 1\text{g/mol}}$, $\boxed{M_N : 14\text{g/mol}}$, $\boxed{M_C : 12\text{g/mol}}$, $\boxed{M_O : 16\text{g/mol}}$

6. On divise l'espace en 2 par composante, donc ceci correspond à $\boxed{\frac{1}{8} \text{ de l'espace}}$.

Jeudi

1. On trouve $\boxed{|i^{2018}| = 1}$ et $\boxed{\text{un argument de } i^{2018} \text{ est } \pi}$.
2. Il s'agit de l'aire sous la courbe, soit un rectangle de côtés 4036 et $\frac{1}{2}$. On trouve $\boxed{\int_{-2018}^{2018} \frac{dx}{2} = 2018}$
3. On trouve (on rappelle que la première bissectrice est axe de symétrie de la courbe).



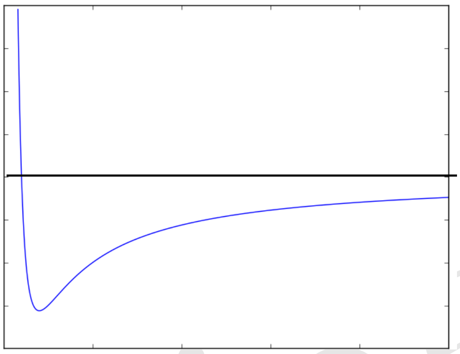
4. $\boxed{\cos(\pi + x) = -\cos(x)}$
5. On trouve $\boxed{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{e} = a\cos\theta}$
6. On trouve une erreur de $\boxed{0{,}9\%}$

Vendredi

1. On trouve $\boxed{Re\,(ze^{i\pi}) = -8 \text{ et } Im\,(ze^{i\pi}) = -13}$ (multiplier par $e^{i\pi} = -1$ revient à faire une rotation de π dans le plan complexe.
2. On a $\boxed{\int_0^1 (2x^2 + 5x - 3)dx = \left[\frac{2x^3}{3} + \frac{5}{2}x^2 - 3x\right]_0^1 = \frac{2}{3} + \frac{5}{2} - 3 = \frac{1}{6}}$
3. On a pour tout réel f : $\boxed{x'(f) = 2018f^{2017}}$
4. Augmenter de 3% signifie être multiplié par 1,03 et diminuer de 5% signifie être multiplié par 0,95. Or $1,03 \times 0,95 = 0,95 \times 1,03$ donc ceci revient au même.
5. Il s'agit du sinus de l'angle opposé à α, soit $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \frac{c}{b}$. On remarque qu'il s'agit également de $\cos\alpha$, ce qui est normal car il s'agit du sinus du **co**mplémentaire, soit le **co**sinus.
6. Il faut d'abord calculer la surface de l'écran. Cette surface vaut $S = ab = \frac{4}{3}b^2$, avec b le plus petit côté. Or la diagonale d est telle que $d^2 = a^2 + b^2 = \frac{2}{5}9b^2$ donc $S = \frac{9}{25}\frac{4}{3}d^2 = \frac{12}{25}d^2$. On a donc $F = \frac{12}{25}32^2 atm.pouces^2 = \frac{12*32^2}{25} atm.pouces^2 \frac{1{,}013.10^5\text{Pa}}{1atm} \frac{2{,}54^2 cm^2}{pouce^2} \frac{1m^2}{10^4 cm^2}$, ce qui donne $\boxed{F = 4,21.10^4\text{Pa.m}^2 = 4,21.10^4\text{N}}$

Samedi

1. On a $\boxed{\left|i^{\frac{1}{2}}\right| = 1\,;\text{ un argument de } i^{\frac{1}{2}} = \frac{\pi}{4}}$ (il suffit d'écrire que $i = e^{i\frac{\pi}{2}}$)
2. On trouve $\boxed{\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x^2}dx = \frac{1}{2}}$
3. On trouve :



4. On a $\boxed{\cos(\frac{\pi}{2} - x) = \sin(x)}$
5. Un schéma montre que si on appelle α l'angle entre la verticale du lieu et la verticale de l'horizon, on a $\cos\alpha = \frac{R_T}{h+R_T}$, où h est la hauteur d'observation, ce qui mène à $\alpha = 3,96.10^{-3}$rd. La distance à l'horizon vaut alors $d = R_T\alpha$ donc $\boxed{\text{d=25,2 km}}$
6. On trouve un rapport de a. Or la production d'énergie est proportionnelle au volume, et la perte calorique à la surface, donc le rapport perte/production est d'autant plus petit que a est grand.