Fondamentaux de collège et lycée

1 Définition des puissances entières et calcul

Définition. Soit $a \in \mathbb{R}$. On définit les puissances entières naturelles de a par $a^0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a^{n+1} = a \times a^n$.

De plus, pour $a \in \mathbb{R}^*$, on définit les puissances entières négatives de a par, pour tout $n \in \mathbb{Z}_-$, $a^n = \left(\dfrac{1}{a}\right)^{-n}$.

Remarque. Bien comprendre en quoi cette définition correspond à celle donnée en général au collège : $a^n = a \times ... \times a$ avec n facteurs a. Pour cela, appliquer la définition à $n = 0$, $n = 1$, $n = 2$, $n = 3$, ... et, à chaque fois, exprimer a^n comme un produit de facteurs a.

Compléter le résultat de cours suivant, qui sont les propriétés de calcul des puissances entières :

Proposition. • *Pour tout $a \in \mathbb{R}$, pour tout $m \in \mathbb{N}$ et tout $n \in \mathbb{N}$, $a^m\, a^n =$* .

- *Pour tout $a \in \mathbb{R}$, pour tout $m \in \mathbb{N}$ et tout $n \in \mathbb{N}$, $\left(a^m\right)^n =$* .
- *Pour tout $a \in \mathbb{R}$ et tout $b \in \mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(ab)^n =$* .
- *Pour tout $a \in \mathbb{R}^*$, pour tout $m \in \mathbb{N}$ et tout $n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{a^m}{a^n} =$* .
- *Pour tout $a \in \mathbb{R}$ et tout $b \in \mathbb{R}^*$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n =$* .

Exercice. Soit $n \in \mathbb{N}$. Écrire les nombres suivants sous la forme $2^\alpha\, 3^\beta\, 5^\gamma$, où α, β, γ sont des entiers relatifs :

a) $\dfrac{2^8 \times 3^{-4} \times 5^3}{2^4 \times 3^6 \times 5^2}$; b) $\dfrac{12^3 \times 50}{30^2}$; c) $(3^n)^3 \times 27^{2n}$; d) $\dfrac{5^n \times 12^2}{10^n \times 6^4}$; e) $(5^n)^n$.

2 Développement

Proposition. • *Distributivité à gauche du produit sur la somme : pour tout $a \in \mathbb{R}$, tout $b \in \mathbb{R}$ et tout $c \in \mathbb{R}$, $a \times (b + c) = a \times b + a \times c$.*

• *Distributivité à droite du produit sur la somme : pour tout $a \in \mathbb{R}$, tout $b \in \mathbb{R}$ et tout $c \in \mathbb{R}$, $(b + c) \times a = b \times a + c \times a$.*

Remarque. Les $\times$ sont très souvent sous-entendus : on écrit en général ab pour $a \times b$. Mais il faut les penser ainsi que les parenthèses car, par exemple, $ab + c \neq a(b + c)$.

Les développements des deux exercices suivants sont importants, à bien maîtriser et à connaître.

Exercice.

1. En utilisant la distributivité à gauche et à droite du produit sur la somme, montrer la double distributivité : pour tout $a \in \mathbb{R}$, tout $b \in \mathbb{R}$, tout $c \in \mathbb{R}$ et tout $d \in \mathbb{R}$,
$$(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd.$$
2. En comprenant en quoi intervient le fait que, pour tout $a \in \mathbb{R}$ et tout $b \in \mathbb{R}$, $ab = ba$, en déduire que, pour tout $a \in \mathbb{R}$ et tout $b \in \mathbb{R}$, $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.
3. Soient $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$. Développer $(a + b)^3$ en remarquant que $(a + b)^3 = (a + b)(a + b)^2$, ainsi que $(a + b)^4$.
4. Soient $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ et $c \in \mathbb{R}$. En remarquant que $a + b + c = (a + b) + c$, développer $(a + b + c)^2$.

Exercice.

1. Soit $q \in \mathbb{R}$. Développer $(q - 1)(q + 1)$, $(q - 1)(q^2 + q + 1)$ et $(q - 1)(q^3 + q^2 + q + 1)$.
2. Soient $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$. Développer $(a - b)(a + b)$, $(a - b)(a^2 + ab + b^2)$ et $(a - b)(a^3 + a^2b + ab^2 + b^3)$.
3. Soient $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}^*$. Appliquer les développements de la question 1 à $q = \dfrac{a}{b}$ pour retrouver ceux de la question 2.

Exercice. Soit $x \in \mathbb{R}$. Développer les expressions suivantes en utilisant, le cas échéant, les exercices précédents :

a) $(x + 1)^2(x - 1)(x^2 + x + 1)$; b) $(x - 1)^3(x^2 + x + 1)$; c) $(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)$;
d) $(x^2 + x + 1)^2$; e) $(x^2 + 1)^3$; f) $(x^3 + x^2)^3$.

3 Factorisation

La factorisation est l'opération inverse du développement. Lorsque, dans une somme de produits, certains ont des facteurs en commun, il s'agit de les reconnaître et d'utiliser la distributivité lue de droite à gauche : pour tout $a \in \mathbb{R}$, tout $b \in \mathbb{R}$ et tout $c \in \mathbb{R}$, $a \times b + a \times c = a \times (b + c)$. Les développements faits dans les exercices précédents donnent aussi des factorisations importantes comme :

- pour tout $a \in \mathbb{R}$ et tout $b \in \mathbb{R}$, $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$;
- pour tout $a \in \mathbb{R}$ et tout $b \in \mathbb{R}$, $a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$;
- pour tout $a \in \mathbb{R}$ et tout $b \in \mathbb{R}$, $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$;
- pour tout $a \in \mathbb{R}$ et tout $b \in \mathbb{R}$, $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$.

Dans les exercices suivants, on fera des factorisations ne faisant pas intervenir les nombres complexes.

Exercice. Soit $x \in \mathbb{R}$. En utilisant les factorisations précédentes, factoriser les expressions suivantes :

a) $x^2 + 2x + 1$; b) $x^2 - 1$; c) $x^2 - 4x + 4$; d) $9x^2 + 6x + 1$; e) $4x^2 - 1$;

f) $x^4 - 1$; g) $x^4 - x^2$; h) $x^3 + x^2 + \dfrac{1}{4}x$; i) $25 - (2x + 3)^2$; j) $(x + 1)(x + 2) - x^2 + 1$.

Exercice. Soit $x \in \mathbb{R}$. Développer $\big(x^2 - \sqrt{2}x + 1\big)\big(x^2 + \sqrt{2}x + 1\big)$ et en déduire une factorisation de $x^8 - 1$.

Exercice. Soient x, y, z et t des nombres réels. Factoriser les expressions suivantes :

a) $x^2 - (y + z)^2$; b) $x^2 + 6xy + 9y^2 - 36z^2$; c) $xy + x + y + 1$; d) $xy - x - y + 1$;

e) $x^3 + x^2y + 2x^2 + 2xy + x + y$; f) $x^2yz + xy^2z + xyz^2$; g) $y^4(z^2 + t^2) + 16x^4(-z^2 - t^2)$;

h) $4x^2y^2 - \big(x^2 + y^2 - z^2\big)^2$.

4 Calcul avec quotients

Proposition. • *Pour tout $a \in \mathbb{R}$, tout $b \in \mathbb{R}^*$, tout $c \in \mathbb{R}$ et tout $d \in \mathbb{R}^*$,* $\dfrac{a}{b} + \dfrac{c}{d} =$.

- *Pour tout $a \in \mathbb{R}$, tout $b \in \mathbb{R}^*$, tout $c \in \mathbb{R}$ et tout $d \in \mathbb{R}^*$,* $\dfrac{a}{b} \times \dfrac{c}{d} =$.
- *Pour tout $a \in \mathbb{R}$, tout $b \in \mathbb{R}^*$, tout $c \in \mathbb{R}^*$ et tout $d \in \mathbb{R}^*$,* $\dfrac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} =$.
- *Pour tout $a \in \mathbb{R}$, tout $b \in \mathbb{R}^*$ et tout $c \in \mathbb{R}^*$,* $\dfrac{\frac{a}{b}}{c} =$.
- *Pour tout $a \in \mathbb{R}$, tout $b \in \mathbb{R}^*$ et tout $c \in \mathbb{R}^*$,* $\dfrac{a}{\frac{b}{c}} =$.
- *Pour tout $a \in \mathbb{R}$, tout $b \in \mathbb{R}$ et tout $c \in \mathbb{R}^*$,* $-\dfrac{a + b}{c} =$.

Remarque. • Lorsqu'on somme des quotients, il faut réduire au dénominateur commun le plus simple et ce n'est pas toujours le produit des dénominateurs. Par exemple, écrire $\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} = \dfrac{4}{8} + \dfrac{2}{8} = \dfrac{6}{8} = \dfrac{3}{4}$ est malvenu. Lui préférer $\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} = \dfrac{2}{4} + \dfrac{1}{4} = \dfrac{3}{4}$ et même être suffisamment à l'aise pour avoir directement $\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} = \dfrac{3}{4}$.

• Lors d'un produit de quotients, il peut y avoir des simplifications : les faire avant d'effectuer les produits des numérateurs et des dénominateurs. Les produits sont en effet plus grands que leurs facteurs et moins immédiatement simplifiables et, en plus, plus durs à calculer si les facteurs sont grands. Par exemple, $31 \times \dfrac{133}{93} = 31 \times \dfrac{133}{3 \times 31} = \dfrac{133}{3}$ et ne pas s'embêter à calculer 31×133.

• Comprendre que les quatrième et cinquième • sont des cas particuliers du troisième •.

Exercice. Soient $a \in \mathbb{R}^*$, $b \in \mathbb{R}^*$ et $n \in \mathbb{Z}$. Simplifier les quotients suivants :

a) $\dfrac{a + a}{a}$; b) $\dfrac{a + a}{2}$; c) $\dfrac{a^2 + a}{a}$; d) $\dfrac{ab + a}{a^2}$; e) $\dfrac{a^n}{a^{n-1}}$; f) $\dfrac{a^{(n+1)^2}}{a^{2n+1}}$; g) $\dfrac{a^{n-1}}{a^n + a^{n-2}}$.

Remarque. Un quotient $\dfrac{ab + c}{ad}$ ne se simplifie pas par a : $\dfrac{ab + c}{ad} \neq \dfrac{b + c}{d}$.

Exercice. Soit $x \in \mathbb{R}$. Déterminer les valeurs pour lesquelles les expressions suivantes sont définies et les simplifier :

a) $x(x+1)(x+2) \times \dfrac{x}{(x+1)(x+2)(x+3)}$; b) $x(x+1)(x+2)\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{1}{x+2}\right)$;

c) $x(x+1)^2(2x+2)^3 \times \dfrac{x}{(x+1)^4(x+2)(x+3)}$; d) $\dfrac{\frac{6(x+1)}{x(x+2)(2x+4)}}{\frac{2x+2}{x^2(x+2)^2}}$; e) $\dfrac{1+\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x+1}}$;

f) $1+\dfrac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{x}}}$; g) $\dfrac{x^3-1}{(x-1)^2}-\dfrac{(x+1)^2}{x-1}$; h) $\dfrac{x}{x-1}-\dfrac{2}{x+1}-\dfrac{2}{x^2-1}$;

i) $\dfrac{1}{x}+\dfrac{x+2}{x^2-4}+\dfrac{2}{x^2-2x}$; j) $\dfrac{x^2}{x^2-x}+\dfrac{x^3}{x^3+x^2}-\dfrac{2x^2}{x^3-x}$.

Exercice. Soient x, y et z des nombres réels deux à deux distincts.

Vérifier que $\dfrac{x}{(x-y)(x-z)}+\dfrac{y}{(y-z)(y-x)}+\dfrac{z}{(z-x)(z-y)}=0$.

Exercice. Soient $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}^*$, $c \in \mathbb{R}$ et $d \in \mathbb{R}^*$ tels que $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}$ et $b+d \neq 0$.

Montrer que $\dfrac{a+c}{b+d}=\dfrac{a}{b}$.

5 Radicaux

Proposition. *Soit $a \in \mathbb{R}_+$. Il existe un unique réel c positif tel que $c^2=a$.*

Définition. Soit $a \in \mathbb{R}_+$. On appelle racine carrée de a l'unique réel c positif tel que $c^2=a$ et on la note $\sqrt{a}$.

Remarque. La racine carré de 0 est bien définie : $0^2=0$ et 0 est positif donc $\sqrt{0}=0$.

Proposition. • *Pour tout $a \in \mathbb{R}_+$ et tout $b \in \mathbb{R}_+$, $\sqrt{ab}=$* .

- *Pour tout $a \in \mathbb{R}_+$, $\left(\sqrt{a}\right)^2=a$.*
- *Pour tout $a \in \mathbb{R}$, $\sqrt{a^2}=\begin{cases} a & \text{si } a \in \mathbb{R}_+ \\ -a & \text{si } a \in \mathbb{R}_- \end{cases}$.*

Exercice. D'après la définition d'une racine carrée, pour montrer qu'un réel c est la racine carrée d'un réel positif a, il faut et il suffit de vérifier que $c^2=a$ et que c est positif. Suivant ce principe, montrer que :

a) $\sqrt{11+6\sqrt{2}}=3+\sqrt{2}$; b) $\sqrt{2+\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$; c) $\sqrt{3+\sqrt{5}}-\sqrt{3-\sqrt{5}}=\sqrt{2}$;

d) pour tout $a \in \mathbb{R}_+$ et tout $b \in \mathbb{R}_+$, $\sqrt{ab}=\sqrt{a}\sqrt{b}$;

e) pour tout $a \in \mathbb{R}$, $\sqrt{a^2}=\begin{cases} a & \text{si } a \in \mathbb{R}_+ \\ -a & \text{si } a \in \mathbb{R}_- \end{cases}$;

f) pour tout $a \in \mathbb{R}_+^*$ et tout $b \in \mathbb{R}_+^*$, $\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a}+\sqrt{b}$.

La technique de calcul vue dans l'exercice suivant est courante et à maîtriser.

Exercice. Méthode de la quantité conjuguée : soient $a \in \mathbb{R}_+$ et $b \in \mathbb{R}_+$ distincts. On a :

$$\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}=\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)}=\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\left(\sqrt{a}\right)^2-\left(\sqrt{b}\right)^2}=\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{a-b}.$$

1. Appliquer la méthode de la quantité conjuguée pour exprimer les nombres suivants sans racines carrées au dénominateur :

   a) $\dfrac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}$; b) $\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1}$; c) $\dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$; d) $\dfrac{1}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Établir les égalités suivantes :

a) $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \dfrac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$; b) $n - \sqrt{n^2 - 1} = \dfrac{1}{n + \sqrt{n^2 - 1}}$;

c) $\dfrac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1}} = n - \sqrt{n^2 - 1}$; d) $\dfrac{1}{\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}} = n\sqrt{n+1} + (n+1)\sqrt{n}$.

Exercice. Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. Simplifier les expressions suivantes :

a) $\dfrac{a}{\sqrt{a}}$; b) $\left(\sqrt{2\sqrt{a}}\right)^4$; c) $\left(\sqrt{a\sqrt{a}}\right)^4$; d) $\dfrac{\sqrt{a} - \dfrac{1}{\sqrt{a}}}{\sqrt{a} + \dfrac{1}{\sqrt{a}}}$; e) $\sqrt{a + 2\sqrt{a} + 1}$;

f) $\sqrt{a - 2\sqrt{a} + 1}$.

Proposition. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$.*

- *Si n est pair, pour tout $a \in \mathbb{R}_+$, il existe un unique réel c positif tel que $c^n = a$.*
- *Si n est impair, pour tout $a \in \mathbb{R}$, il existe un unique réel c tel que $c^n = a$.*

Définition. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

• Si n est pair, pour tout $a \in \mathbb{R}_+$, l'unique réel c positif tel que $c^n = a$ est appelé la racine n-ième de a et est noté $\sqrt[n]{a}$.

• Si n est impair, pour tout $a \in \mathbb{R}$, l'unique réel c tel que $c^n = a$ est appelé la racine n-ième de a et est noté $\sqrt[n]{a}$.

Exercice. Soient $m \in \mathbb{N}^*$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $a \in \mathbb{R}$. Sous réserve de définition, simplifier les expressions suivantes :
a) $\left(\sqrt[n]{a}\right)^{n+1}$; b) $\left(\sqrt[m]{a}\right)^{mn}$; c) $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}$.

Exercice. a) Soient $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$. Factoriser $a - b$ par $\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b}$.
b) Écrire $\dfrac{1}{\sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{2}}$ sans racines cubiques au dénominateur.

6 Inégalités et études de signes

Sur $\mathbb{R}$, il y a ce qu'on appelle une relation d'ordre et elle a les propriétés fondamentales suivantes :

• pour tout $a \in \mathbb{R}$, tout $b \in \mathbb{R}$ et tout $k \in \mathbb{R}$, si $a \leqslant b$, alors $a + k \leqslant b + k$ (compatibilité avec l'addition) ;

• pour tout $a \in \mathbb{R}$, tout $b \in \mathbb{R}$ et tout $k \in \mathbb{R}$, si $a \leqslant b$ et si $k \geqslant 0$, alors $ka \leqslant kb$ (compatibilité avec la multiplication par un réel positif) ;

• pour tout $a \in \mathbb{R}$, tout $b \in \mathbb{R}$ et tout $c \in \mathbb{R}$, si $a \leqslant b$ et si $b \leqslant c$, alors $a \leqslant c$ (transitivité) ;

• pour tout $a \in \mathbb{R}$ et tout $b \in \mathbb{R}$, $a \leqslant b$ ou $b \leqslant a$ (totalité).

À cause de sa compatibilité avec l'addition, elle a aussi les propriétés suivantes :

• pour tout $a \in \mathbb{R}$ et tout $b \in \mathbb{R}$, $a \leqslant b$ si et seulement si $0 \leqslant b - a$;

• pour tout $a \in \mathbb{R}$ et tout $b \in \mathbb{R}$, si $a \leqslant b$, alors $-a \geqslant -b$;

• pour tout $a \in \mathbb{R}$, tout $b \in \mathbb{R}$ et tout $k \in \mathbb{R}$, si $a \leqslant b$ et si $k \leqslant 0$, alors $ka \geqslant kb$.

La compatibilité avec la multiplication par un réel positif entraîne aussi :

• pour tout $a \in \mathbb{R}$ et tout $b \in \mathbb{R}$ de même signe, $ab \geqslant 0$;

• pour tout $a \in \mathbb{R}$ et tout $b \in \mathbb{R}$ de signes opposés, $ab \leqslant 0$;

• pour tout $a \in \mathbb{R}$, $a^2 \geqslant 0$;

• pour tout $a \in \mathbb{R}^*$, a et $\dfrac{1}{a}$ sont de même signe.

Enfin, combinées avec la transitivité, la compatibilité avec l'addition et la compatibilité avec la multiplication par un réel positif donnent :

• pour tout $a \in \mathbb{R}$, tout $b \in \mathbb{R}$, tout $c \in \mathbb{R}$ et tout $d \in \mathbb{R}$, si $a \leqslant c$ et si $b \leqslant d$, alors $a + b \leqslant c + d$;

• pour tout $a \in \mathbb{R}$, tout $b \in \mathbb{R}$, tout $c \in \mathbb{R}$ et tout $d \in \mathbb{R}$, si $a \leqslant c$, si $b \leqslant d$ et si b et c sont positifs, alors $ab \leqslant cd$.

Une méthode extrêmement courante pour établir des inégalités est d'étudier le signe de la différence des membres. Cela repose sur l'équivalence : pour tous nombres réels a et b, $a \leqslant b$ si et seulement si $0 \leqslant b - a$.

Par ailleurs, étant donné que l'on sait déterminer le signe d'un produit à partir de celui de ses facteurs, on peut, voire on doit, si possible, chercher à factoriser une expression pour étudier son signe. Lorsque l'on compare des quotients, la réduction au même dénominateur est aussi assez systématique.

Exercice. 1. Montrer que :

a) pour tout $a \in \mathbb{R}_+$ et tout $b \in \mathbb{R}_+$, si $a \leqslant b$, alors $a^2 \leqslant b^2$;

b) pour tout $a \in \mathbb{R}_+$ et tout $b \in \mathbb{R}_+$, si $a \leqslant b$, alors $\sqrt{a} \leqslant \sqrt{b}$;

c) pour tout $a \in \mathbb{R}^*$ et tout $b \in \mathbb{R}^*$ de même signe, si $a \leqslant b$, alors $\dfrac{1}{a} \geqslant \dfrac{1}{b}$;

d) pour tout $a \in \mathbb{R}$ et tout $b \in \mathbb{R}$, $ab \leqslant \dfrac{1}{2}\big(a^2 + b^2\big)$;

e) pour tout $t \in \mathbb{R}$, $t\big(1 - t\big) \leqslant \dfrac{1}{4}$.

2. Soit $x \in \mathbb{R}$. Comparer selon la valeur de x :

a) x et x^2 ; b) x et x^3 ; c) x^2 et x^3.

3. Soient $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}_+^*$. Comparer $\dfrac{a+1}{b+1}$ et $\dfrac{a}{b}$. *Deux cas seront à distinguer.*

Exercice. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Exprimer les sommes suivantes comme des quotients simplifiés et en déduire leurs signes :

a) $\dfrac{1}{(n+1)^2} + \dfrac{1}{n+1} - \dfrac{1}{n}$; b) $\dfrac{1}{1+n^2} - \dfrac{1}{(1+n)^2}$; c) $\dfrac{1}{3(n+1)^2} + \dfrac{1}{n^2(n+1)^2} - \dfrac{1}{3n^2}$;

d) $\dfrac{1}{(n+1)^2+1} + \dfrac{1}{n+1} - \dfrac{1}{2(n+1)^2} - \left(\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{2n^2}\right)$.

Exercice. 1. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $y \in \mathbb{R}$, $xy \leqslant \dfrac{1}{2}\big(x^2 + y^2\big)$.

2. En déduire que :

a) pour tout $a \in \mathbb{R}$, tout $b \in \mathbb{R}$ et tout $c \in \mathbb{R}$, $ab + bc + ca \leqslant a^2 + b^2 + c^2$;

b) pour tout $u \in \mathbb{R}_+$ et tout $v \in \mathbb{R}_+$, $\sqrt{uv} \leqslant \dfrac{1}{2}\big(u + v\big)$, puis que, pour tout $a \in \mathbb{R}_+$, tout $b \in \mathbb{R}_+$ et tout $c \in \mathbb{R}_+$, $\big(a + b\big)\big(b + c\big)\big(c + a\big) \geqslant 8abc$.

Exercice. Pour comparer des nombres comportant des racines carrées de réels, on compare souvent leurs carrés car ils se calculent mieux. Les racines carrées de réels étant positives, elles sont, en effet, rangées dans le même ordre que leurs carrés. Suivant cette idée, montrer que :

a) pour tout $a \in \mathbb{R}_+$ et tout $b \in \mathbb{R}_+$, $\sqrt{a+b} \leqslant \sqrt{a} + \sqrt{b}$;

b) pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\big(2n+1\big)\sqrt{3n+4} \leqslant \big(2n+2\big)\sqrt{3n+1}$;

c) pour tout $a \in \mathbb{R}_+$, tout $b \in \mathbb{R}_+$ et tout $t \in [0,1]$, $\sqrt{ta + (1-t)b} \geqslant t\sqrt{a} + (1-t)\sqrt{b}$.

7 Fonction exponentielle

Proposition. *Il existe une unique fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ dérivable sur $\mathbb{R}$ et vérifiant $f' = f$ et $f(0) = 1$.*

Définition. L'unique fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ dérivable sur $\mathbb{R}$ et vérifiant $f' = f$ et $f(0) = 1$ est appelée la fonction exponentielle et est notée exp.

Proposition. *Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $y \in \mathbb{R}$,* $\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)$.

Cette propriété fondamentale évoquant celle des puissances entières, en notant e le nombre $\exp(1)$, on l'écrit souvent : pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $y \in \mathbb{R}$, $e^{x+y} = e^x\, e^y$.

Proposition. • *Pour tout $x \in \mathbb{R}$,* $\dfrac{1}{e^x} = e^{-x}$.

- *Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $y \in \mathbb{R}$,* $\dfrac{e^x}{e^y} = e^{x-y}$.
- *La fonction exponentielle est strictement positive sur $\mathbb{R}$.*
- *La fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.*

Exercice. 1. Soient $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ et $c \in \mathbb{R}$. Simplifier les nombres suivants :

a) $e^a e^b e^c$; b) $\dfrac{e^a e^b}{e^c}$; c) $e^{a-b} e^{b-c} e^{c-a}$; d) $\dfrac{\left(e^{\frac{a+b}{2}}\right)^2}{e^{a+b+c}}$.

2. a) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $y \in \mathbb{R}$, $e^{\frac{x+y}{2}} \leqslant \dfrac{e^x + e^y}{2}$.

   b) En déduire que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $1 \leqslant \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$.

3. a) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $-1 < \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} < 1$.

   b) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \dfrac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} = \dfrac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}}$.

4. a) Montrer que, pour tout $t \in [1, +\infty[$, $e^{-t^2} \leqslant e^{-t}$.

   b) Montrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $e^{-t^2} \leqslant e^{-2t+1}$.

   c) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ et tout $t \in \mathbb{R}_+$, $\dfrac{e^{-xt}}{1+t^2} \leqslant \dfrac{1}{1+t^2}$.

Exercice. 1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Étudier les variations de la fonction $f_n \begin{pmatrix} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{e^x}{x^n} \end{pmatrix}$ et en déduire que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $e^x \geqslant \left(\dfrac{e}{n}\right)^n x^n$.

2. En déduire que $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$ et que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x^n} = +\infty$.

3. Soit $n \in \mathbb{N}$. En remarquant que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^n e^x = \dfrac{x^n}{e^{-x}}$, déduire de la question 2. que $\lim\limits_{x \to -\infty} x^n e^x = 0$.

Exercice. On rappelle que, si u est une fonction d'un intervalle I à valeurs dans $\mathbb{R}$ dérivable sur I, alors $\exp \circ u$ est dérivable sur I et $\big(\exp \circ u\big)' = u' \times \big(\exp \circ u\big)$.

1. Déterminer la dérivée des fonctions suivantes :

   a) $f \begin{pmatrix} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & e^{-x} \end{pmatrix}$; b) $g \begin{pmatrix} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & e^{x^2} \end{pmatrix}$; c) $h \begin{pmatrix} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & e^{e^x} \end{pmatrix}$;

   d) $k \begin{pmatrix} \mathbb{R}^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & e^{-\frac{1}{x}} \end{pmatrix}$.

2. Étudier les limites des fonctions précédentes aux bornes de leurs domaines de définition.

8 Fonction logarithme

Proposition. • $\ln(1) = 0$.

- *Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ et tout $y \in \mathbb{R}_+^*$,* $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$.
- *Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,* $\ln\left(\dfrac{1}{x}\right) = -\ln(x)$.
- *Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ et tout $n \in \mathbb{Z}$,* $\ln\big(x^n\big) = n \ln(x)$.
- *Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ et tout $y \in \mathbb{R}_+^*$,* $\ln\left(\dfrac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y)$.
- *La fonction logarithme est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.*
- *Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,* $\ln'(x) = \dfrac{1}{x}$.

Exercice. Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$.

1. Calculer $\ln\left(\sqrt{a+1}+\sqrt{a}\right)+\ln\left(\sqrt{a+1}-\sqrt{a}\right)$.
2. Vérifier que $\ln\left(a+1\right)=\ln(a)+\ln\left(1+\dfrac{1}{a}\right)$.
3. Simplifier les expressions $e^{-\ln(a)}$, $e^{2\ln(a)}$, $e^{-2\ln(a)}$ et $e^{-2\ln(\ln(a+1))}$.
4. Donner les valeurs de a pour lesquelles $\ln\left(\ln(a)\right)$ est défini. Même question pour $\ln\Big(\ln\left(\ln(a)\right)\Big)$.

Exercice. 1. En étudiant la fonction $f\begin{pmatrix}]-1,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x-\ln(1+x) \end{pmatrix}$, montrer que, pour tout $x \in]-1,+\infty[$, $\ln(1+x) \leqslant x$.

2. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $x-\dfrac{x^2}{2} \leqslant \ln(1+x)$.

Exercice. 1. a) Étudier les variations de la fonction $\varphi\begin{pmatrix} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2-\dfrac{1}{x^2}-4\ln(x) \end{pmatrix}$.

b) Calculer $\varphi(1)$ et en déduire, pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, le signe de $\varphi(x)$ selon la valeur de x.

2. On considère la fonction $f\begin{pmatrix} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{1}{4}x^2+\dfrac{1}{4x^2}-\ln^2(x) \end{pmatrix}$.

a) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $f\left(\dfrac{1}{x}\right)=f(x)$.

b) Justifier que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, exprimer, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $f'(x)$ en fonction de $\varphi(x)$ et en déduire les variations de la fonction f.

9 Équations

Résoudre une équation d'inconnue un nombre réel (par exemple) consiste à déterminer tous les nombres réels la vérifiant. Ainsi, résoudre l'équation $x^2=1$, c'est déterminer les nombres réels dont le carré est 1.

Pour étudier une équation, on se ramène presque toujours à un second membre nul. Par exemple, l'équation $x^2=1$ est équivalente à l'équation $x^2-1=0$. On soustrait en effet 1 à chaque membre, ce qui donne le même nombre si x vérifie l'équation et, partant de $x^2-1=0$, ajouter 1 à chaque membre redonne l'équation $x^2=1$.

Se ramener à second membre nul permet :

• de factoriser si possible le premier membre pour utiliser la règle du produit nul : pour $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$, $ab=0$ équivaut à $a=0$ ou $b=0$;

• d'utiliser le théorème des valeurs intermédiaires : soit I un intervalle, soient $a \in I$ et $b \in I$ tels que $a<b$ et f une fonction définie sur I. Si f est continue et si $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes opposés, alors f s'annule sur $[a,b]$.

En première utilisation, le théorème des valeurs intermédiaires garantit l'existence de solution à certaines équations. Il faut comprendre qu'en général, on ne sait pas résoudre une équation exactement mais que l'accès au nombre de solutions et à des valeurs approchées des solutions est plus facile. Cela donne son importance au théorème des valeurs intermédiaires.

Exercice. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes. *Pour les équations de degré 2 de cet exercice, on s'interdira le calcul de discriminant.*

a) $4x+1=-2x+3$; b) $2(x-1)=-3(x+1)$; c) $x^2=-2x-1$; d) $x(2x+1)=(x-1)x$;

e) $x^2=4(x+1)^2$; f) $x^2=x$; g) $x^3=x$; h) $x^4=x^2$; i) $\dfrac{2x}{x^2+1}=1$; j) $\dfrac{x}{x^2+4}=\dfrac{1}{4}$.

Exercice. Préciser le domaine de définition des équations suivantes et les résoudre :

a) $e^{x^2}=e^{1-x^2}$; b) $e^{x^2}=-e^{1-x^2}$; c) $e^{x^2}=2e^{-x^2}$; d) $\ln^2(x)-\ln\left(\dfrac{1}{x}\right)=0$;

d) $\ln(x+1)+\ln(x+3)-\ln(x+13)=0$.

Exercice.

1. Monter que l'équation $\big(2-x\big)e^x - 1 = 0$ a deux solutions réelles exactement, que l'on notera α et β avec $\alpha < \beta$.
2. En admettant que $2 < e < 3$, montrer que $\alpha \in \big[-2, -1\big]$ et que $\beta \in [1, 2]$.

Exercice. Montrer que l'équation $\ln(x) = \dfrac{1}{6}x^2$ a exactement deux solutions réelles et que l'équation $\ln(x) = x^2$ n'a pas de solution réelle.